АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Ю. А. Митропольский
А. М. Самойленко
Д. И. Мартынюк

СИСТЕМЫ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ И УСЛОВНО-ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

КИЕВ
НАУКОВА
ДУМКА 1984

УДК 517.949.22

Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами / Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.— Киев : Наук. думка, 1985.—216 с.

В монографии приведены приближенные аналитические методы отыскания колебательных решений эволюционных систем дифференциальных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. Для периодических систем обоснованы метод Бубнова — Галеркина отыскания периодических решений эволюционных уравнений с отклоняющимся аргументом и численно-аналитический метод. Для систем с условно-периодическими коэффициентами изложена теория возмущения инвариантных тороидальных многообразий, для систем с запаздыванием и систем разностных уравнений описано поведение решений на тороидальных многообразиях и в их окрестностях.

Для специалистов, интересующихся колебательными процессами, а также преподавателей и студентов математических факультетов вузов.

Библиогр.: с. 207—213 (153 назв.).

Ответственный редактор *В. С. Королюк*

Рецензенты *О. С. Парасюк, И. А. Луковский*

Редакция физико-математической литературы

$$\text{М}\ \frac{1702050000\text{-}617}{\text{М}221(04)\text{-}84}\ 143\text{-}85$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Многие задачи небесной механики, физики и техники приводят к исследованию колебаний систем, описываемых системами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и системами уравнений в частных производных. Методы исследования периодических и квазипериодических решений таких систем разработаны достаточно полно и изложены во многих фундаментальных монографиях.

В последнее время в связи с запросами практики и в первую очередь благодаря развитию теории систем автоматического регулирования возрос интерес к теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, особенно дифференциальных уравнений с запаздыванием и приводящихся к ним. Уравнения с запаздывающим аргументом находят много приложений в задачах автоматики, телемеханики, радиолокации, электрорадиосвязи, в исследованиях по теоретической кибернетике, ракетной технике, судостроению, медицине, биологии и т. д. [31, 32, 34, 47, 90, 100, 102].

Развитие технических наук обусловило интерес и к разностным уравнениям, которые оказались удобной моделью для описания импульсных и дискретных динамических систем, а также систем, в состав которых входят цифровые вычислительные устройства [12, 137]. Кроме того, разностные уравнения встречаются при численном решении различных классов дифференциальных уравнений с помощью метода конечных разностей.

При исследовании нелинейных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием, различных классов интегро-дифференциальных уравнений и разностных уравнений вопросы существования периодических решений и построения алгоритмов их отыскания являются одними из самых важных. Большинство известных методов приводит к достижению значительных результатов при исследовании слабо нелинейных систем с запаздыванием (систем, содержащих так называемый малый параметр). К таким методам можно отнести асимптотический метод Крылова — Боголюбова [9, 20, 23, 25, 26, 41], метод малого параметра Пуанкаре, метод вспомогательных систем Шиманова и метод функциональных уравнений Ляпунова, развитый для указанных систем Ю. А. Рябовым (см., например, работы [7, 10, 54—56, 68, 69, 74—76, 80, 104—111, 138, 140—144].

Для изучения периодических решений сильно нелинейных систем с запаздыванием (систем, не содержащих малого параметра) применение перечисленных методов, ставших уже классическими, не всегда возможно. Для этих систем эффективными при исследовании периодических решений являются топологические методы [13—15, 35, 38, 39, 40]. Однако последние не указывают алгоритма по-

строения периодических решений, и поэтому весьма актуальной является задача создания таких методов, которые наряду с доказательством теорем существования периодических решений давали бы алгоритм их отыскания.

Одним из подобных методов является метод Бубнова — Галеркина, получивший достаточно полное обоснование для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в работах М. Урабе [132, 151] и Л. Чезари [148]. Обоснование применимости этого метода к системам с запаздыванием связано с принципиальными трудностями. Идея их преодоления содержится в работе [124], посвященной исследованию периодических решений одного класса интегро-дифференциальных уравнений.

Одним из авторов монографии был предложен численно-аналитический метод исследования периодических решений нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, позволяющий находить периодические решения таких систем в виде равномерно сходящейся последовательности периодических функций. В настоящей монографии дано обоснование возможности применения этого метода для исследования периодических решений различных классов нелинейных систем с наследственностью и выяснено влияние запаздывания на существование таких решений.

Во многих задачах небесной механики, физики, техники встречаются процессы, в которых зависимость от времени не является периодической, а выражается посредством тригонометрических сумм. В связи с этим возник интерес к исследованию почти периодических решений дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами. Важным подклассом почти периодических функций являются квазипериодические по Бору функции [42], обладающие особенностью, заключающейся в том, что их спектр всюду плотно расположен на вещественной оси [11]. Вопросами существования квазипериодических решений для различных классов обыкновенных дифференциальных уравнений занимались Н. Н. Боголюбов [7], Ю. Мозер [89], М. Урабе [152, 153], А. М. Самойленко и И. О. Парасюк [125, 99] и др. Построение квазипериодических решений на ЭВМ в задачах нелинейной механики рассматривалось Ю. А. Рябовым и И. Л. Толмачевым [112].

Однако квазипериодические решения сохраняются при возмущениях далеко не всегда, и изолированное инвариантное тороидальное многообразие является более устойчивым объектом. Теории возмущений инвариантных тороидальных многообразий систем обыкновенных дифференциальных уравнений посвящены работы Ю. Мозера [89], А. М. Самойленко [120, 121], Р. Саккера [149, 150], Ю. И. Неймарка [27, 91, 93] и др. Вопросы существования компактных замкнутых инвариантных многообразий (не обязательно тороидальных) изучались в работах Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского, А. М. Самойленко, О. Б. Лыковой, Дж. Хейла, Я. Курцвейла, Ю. И. Неймарка, В. А. Плисса, С. Смейла, Ч. Пью, М. Пейсото, И. Купки [79, 103].

Для систем с запаздыванием указанные вопросы разработаны менее полно. И если по теории локальных инвариантных многообразий для систем с запаздыванием к настоящему времени В. И. Фодчуком [134, 135], А. Халанаем [136], Дж. Хейлом [138], Ю. И. Неймарком [92], А. М. Зверкиным [30] и другими получен ряд результатов, то работ, посвященных изучению инвариантных тороидальных многообразий таких систем, сравнительно мало [64, 65, 96—98].

После работ А. Н. Колмогорова и В. И. Арнольда (см., например, [2—4, 24]) Н. Н. Боголюбову [8] удалось модернизировать метод последовательных

имен переменных, что обеспечило получение ускоренной сходимости соответствующих разложений. С помощью этого метода в работе [78] исследовалось поведение решений нелинейной системы дифференциальных уравнений в окрестности квазипериодического решения, решались вопросы приводимости нелинейной системы к линейной с постоянными коэффициентами. В работах [81, 82, 84—88, 114, 117] изучалось поведение траекторий векторного поля конечной гладкости на m-мерном торе и приводимость линейных систем с квазипериодическими коэффициентами. Метод ускоренной сходимости позволил получить глубокие результаты, относящиеся к изучению расположения интегральных кривых систем нелинейных уравнений в окрестности гладкого тороидального и компактного инвариантных многообразий [10, 115, 116].

С разработкой метода ускоренной сходимости наметилась возможность достаточно полного исследования приводимости линейных систем дифференциально-разностных [16, 17] и разностных уравнений с квазипериодическими коэффициентами и приводимости нелинейных систем разностных уравнений на тороидальном множестве и в его окрестности. Заметим, что указанные типы уравнений объединены в один класс и названы авторами эволюционными, поскольку они могут описывать реальные системы, скорость изменения которых в данный момент времени зависит от состояний системы в этот и в предшествующие моменты времени.

Таким образом, вопросы построения и исследования периодических и квазипериодических решений различных классов дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, интегро-дифференциальных уравнений, разностных и других типов уравнений являются достаточно важными и актуальными. Решению некоторых из этих вопросов и посвящена настоящая работа.

В первой главе изучаются периодические решения нелинейных систем эволюционных уравнений, охватывающие дифференциальные уравнения с запаздыванием, системы нейтрального типа, различные классы нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений и т. п. Для таких уравнений предлагается численно-аналитический метод исследования периодических решений эволюционных уравнений, согласно которому периодическое решение можно искать как предел равномерно сходящейся последовательности периодических функций. Предлагается алгоритм построения этой последовательности, исходя из которой можно также доказать существование точного периодического решения эволюционных систем. В этой же главе предложена вычислительная схема отыскания периодических решений и получена оценка ее точности. Данная схема удобна для практического применения, поскольку она сводит построение равномерно сходящейся последовательности к вычислению интегралов от тригонометрических полиномов.

Во второй и третьей главах рассматриваются вопросы существования периодических и квазипериодических решений систем с запаздыванием. Для нелинейной системы с квазипериодическими коэффициентами и запаздыванием доказывается теорема, указывающая условия существования квазипериодических решений. В процессе доказательства этой теоремы указывается метод нахождения таких решений путем сведения задачи отыскания квазипериодических решений к задаче отыскания периодических решений специальной системы уравнений в частных производных. Для отыскания периодических решений дается обоснование применимости метода Бубнова — Галеркина. Доказаны важные теоремы существования приближений Бубнова — Галеркина и сходимости этих приближений к точ-

ному периодическому решению. Применение метода Бубнова — Галеркина возможно благодаря новому, ранее неизвестному, приему — использованию при построении периодических решений функции Грина задачи о периодических решениях.

Четвертая глава посвящена изучению инвариантных тороидальных многообразий для различных классов систем дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами. Доказаны теоремы существования инвариантных тороидальных многообразий различных классов систем с запаздыванием и указаны условия, при которых эти многообразия существуют. Кроме того, описан метод построения указанных многообразий, исследован вопрос о поведении траекторий нелинейной системы с квазипериодическими коэффициентами и запаздыванием в окрестности экспоненциально-устойчивого тороидального многообразия.

В пятой главе рассматривается вопрос о приводимости линейной системы разностных уравнений с квазипериодическими коэффициентами к линейной системе разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрен случай, когда правая часть уравнения не является аналитической функцией, а имеет конечное число производных.

Шестая глава монографии содержит исследование инвариантных тороидальных множеств систем разностных уравнений с квазипериодическими коэффициентами. Здесь, на наш взгляд, получен интересный результат: доказана теорема существования непрерывного тора у дискретной динамической системы. Кроме того, в этой главе указан метод построения тороидального множества в виде равномерно сходящейся последовательности таких множеств и описано поведение траекторий нелинейной системы разностных уравнений на торе и в его окрестности.

Авторы

Глава I

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

При исследовании нелинейных систем дифференциальных уравнений с последействием одним из важных вопросов является изучение периодических решений и построение алгоритма их отыскания. Для исследования периодических решений применяются различные методы — от графических до топологических. Большинство из них при исследовании слабо нелинейных систем с последействием (систем, содержащих так называемый малый параметр) приводит к хорошим результатам. К таким методам можно отнести асимптотический, метод малого параметра Пуанкаре, метод вспомогательных систем Шиманова и др.

Для изучения периодических решений сильно нелинейных систем с последействием (систем, не содержащих малого параметра) применение данных методов, ставших уже классическими, не всегда возможно. В связи с этим весьма актуальными являются вопросы выделения отдельных классов нелинейных систем дифференциальных уравнений и создание всегда применяемых для этих классов методов исследования.

В данной главе рассматривается численно-аналитический метод исследования периодических решений ряда классов нелинейных систем с последействием. Этот метод предложен в работах [118, 119] для исследования периодических решений нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Дальнейшее развитие он получил при исследованиях нелинейных систем с запаздыванием [61—63], систем нейтрального типа [122—131], счетных систем с запаздыванием [43—46], различных классов нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений [18, 19, 21, 22, 70] и т. д.

Численно-аналитический метод позволяет не только находить периодические решения систем с последействием в виде равномерно сходящейся последовательности периодических функций, но и, исходя из функций этой последовательности, судить о существовании таких решений. Прежде чем переходить к изложению сущности этого метода, введем некоторые обозначения и докажем вспомогательные утверждения, необходимые в дальнейшем.

§ 1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ — точки n-мерного евклидова пространства E_n, D — замкнутая ограниченная область пространства E_n, Γ_D — ее граница. Для точки $x \in E_n$ под $|\mathbf{x}|$ будем понимать вектор $|\mathbf{x}| = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$, под $\|x\|$ — октаэдрическую норму: $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$. Через $\mathbf{M}$ будем обозначать вектор с числовыми неотрицательными компонентами: $\mathbf{M} = (M_1, M_2, \dots, M_n)$, а через $K_1 = \{k'_{ij}\}$, $K_2 = \{k''_{ij}\}$ — $(n \times n)$-мерные матрицы, в i-й строке и j-м столбце которых находятся неотрицательные элементы k'_{ij}, k''_{ij} соответственно.

Для вектор-функции $f(t, x, y) = (f_1(t, x, y), f_2(t, x, y), \dots, f_n(t, x, y))$ через $|f(t, x, y)|_0$ будем обозначать вектор:

$$|f(t, x, y)|_0 = (\max_t |f_1(t, x, y)|, \ \max_t |f_2(t, x, y)|, \dots, \max_t |f_n(t, x, y)|),$$

а через $\|f(t, x, y)\|_0$ — скаляр:

$$\|f(t, x, y)\|_0 = \sum_{i=1}^{n} \max_t |f_i(t, x, y)|.$$

Для периодической по t с периодом ω вектор-функции $f(t, x, y)$ посредством $\overline{f(t, x, y)}$ будем обозначать интегральное среднее по времени:

$$\overline{f(t, x, y)} = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} \mathbf{f}(t, x, y)\, dt.$$

Под множеством D—$\mathbf{M}\omega/2$ будем понимать множество точек области D, принадлежащих D вместе со своей $\mathbf{M}\omega/2$ окрестностью, причем под $\mathbf{M}\omega/2$ окрестностью точки $\bar{x} \in E_n$ понимается множество точек $x \in E_n$, удовлетворяющих неравенствам $|x_i - \bar{x}_i| \leqslant \mathbf{M}_i \omega/2$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t - \Delta)), \tag{1.1}$$

где Δ — постоянная величина, характеризующая запаздывание в системе, $\Delta > 0$; вектор-функция $f(t, x, y)$ — периодическая по t с периодом ω, определена для всех $-\infty < t < \infty$, $x \in D$, $y = x(t - \Delta) \in D$.

Предположим, что вектор-функция $f(t, x, y)$ непрерывна по совокупности переменных t, x, y и удовлетворяет неравенству

$$|f(t, x, y)| \leqslant \mathbf{M} \tag{1.2}$$

и условию Липшица с матрицами K_1, K_2

$$|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \leqslant K_1 |x_1 - x_2| + K_2 |y_1 - y_2| \tag{1.3}$$

для всех $-\infty < t < \infty$, $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in D$. Неравенства (1.2), (1.3) будем понимать в следующем смысле:

$$|f_i(t, x, y)| \leqslant M_i; \qquad |f_i(t, x_1, y_1) - f_i(t, x_2, y_2)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} k'_{ij} |x_{1j} - x_{2j}| + \sum_{j=1}^{n} k''_{ij} |y_{1j} - y_{2j}|.$$

В дальнейшем будем рассматривать лишь такие системы (1.1), для которых область D, вектор $\mathbf{M}$, матрицы K_1, K_2, запаздывание Δ и период ω удовлетворяют условиям:

1) множество $D - \mathbf{M}\omega/2$ не пусто;

2) наибольшее собственное решение λ_{max} матрицы

$$Q = (K_1 + K_2)\left(\frac{\omega}{3} + \frac{3}{2\omega}\Delta^2\left(1 - \frac{\Delta}{\omega}\right)^2\right)$$

не превышает единицы: $\lambda_{max} < 1$.

Из теоремы Перрона [5] известно, что наибольшее собственное число матрицы Q в силу неотрицательности ее элементов действительно, неотрицательно и оценивается сверху значением

$$\left(\frac{\omega}{3} + \frac{3}{2\omega}\Delta^2\left(1 - \frac{\Delta}{\omega}\right)^2\right) \min\left\{\max_i \sum_{j=1}^{n} (k'_{ij} + k''_{ij}), \ \max_i \sum_{i=1}^{n} (k'_{ij} + k''_{ij})\right\}. \tag{1.4}$$

Из (1.4) следует, что если неравенство (1.3) задано с помощью векторов $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ в виде

$$|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \leqslant \mathbf{K}_1 |x_1 - x_2| + \mathbf{K}_2 |y_1 - y_2| \tag{1.5}$$

или скаляров k_1, k_2 в виде

$$|f_i(t, x_1, y_1) - f_i(t, x_2, y_2)| \leqslant k_1 \| x_1 - x_2 \| + k_2 \| y_1 - y_2 \|, \tag{1.6}$$

то условие $\lambda_{max} < 1$ выполняется соответственно при

$$q_1 \quad (\| \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 \|)\left(\frac{\omega}{3} + \frac{3}{2\omega}\Delta^2\left(1 - \frac{\Delta}{\omega}\right)^2\right) < 1; \tag{1.7}$$

$$q_2 = (k_1 + k_2)\, n\left(\frac{\omega}{3} + \frac{3}{2\omega}\Delta^2\left(1 - \frac{\Delta}{\omega}\right)^2\right) < 1. \tag{1.8}$$

Отметим также, что при изучении периодических по t с периодом ω решений системы (1.1) без ограничения общности можно считать, что $0 \leqslant \Delta \leqslant \omega$. Действительно, в противном случае можно Δ представить в виде $\Delta = n\omega + \Delta_1$, где m — целое число, $m \geqslant 1$, и Δ_1 удовлетворяет неравенству $0 \leqslant \Delta_1 \leqslant \omega$. В силу периодичности по t с периодом ω решения системы (1.1) очевидно, что ω-периодические решения уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t - \Delta_1))$$

и периодическое решение уравнения (1.1) совпадают.

В дальнейшем важную роль при изучении периодических решений будут играть следующие утверждения [118, 145].

Лемма 1.1. *Пусть $f(t)$ — непрерывная на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \omega$ функция. Тогда для всех t из этого отрезка выполняется неравенство*

$$\left| \int_0^t [f(t) - \overline{f(t)}]\, dt \right| \leqslant 2\,|f(t)|_0 t\,(1 - t/\omega).$$

Доказательство. Перепишем левую часть неравенства в виде

$$\int_0^t \left[f(t) - \frac{1}{\omega} \int_0^\omega f(t)\, dt \right] dt = \int_0^t f(t)\, dt - \frac{t}{\omega} \int_0^\omega f(t)\, dt =$$

$$= \int_0^t f(t)\, dt - \frac{t}{\omega} \int_0^t f(t)\, dt - \frac{t}{\omega} \int_t^\omega f(t)\, dt = \left(1 - \frac{t}{\omega}\right) \int_0^t f(t)\, dt -$$

$$- \frac{t}{\omega} \int_t^\omega f(t)\, dt.$$

Отсюда

$$\left| \int_0^t [f(t) - \overline{f(t)}]\, dt \right| \leqslant \left(1 - \frac{t}{\omega}\right) \int_0^t |f(t)|_0\, dt + \frac{t}{\omega} \int_t^\omega |f(t)|_0 dt =$$

$$= \left(1 - \frac{t}{\omega}\right) t\, |f(t)|_0 + \frac{t}{\omega} (\omega - t)\, |f(t)|_0 = 2\,|f(t)|_0 t \left(1 - \frac{t}{\omega}\right).$$

Лемма 1.2. *Периодическое с периодом ω решение $x_\psi(t) = \varphi(t)$ с начальной функцией $\psi(t)$, заданной на начальном множестве $t_0 - \Delta \leqslant t \leqslant t_0$ системы*

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,\ x(t),\ x(t - \Delta(t))),$$

где непрерывная функция $f(t, x, y)$ и функция $\Delta(t)$ являются периодическими по t с периодом ω (случай $\Delta = \mathrm{const}$ не исключается), определяется начальной вектор-функцией $\psi(t)$, являющейся периодическим продолжением решения $\varphi(t)$ на начальное множество.

Доказательство. Выберем целое число m таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + m\omega} \Delta(t) < m\omega.$$

Решение $\varphi(t)$ при $t \geqslant t_0 + m\omega$ определяется начальной вектор-функцией $\varphi(t)$, заданной на начальном множестве $E_{t_0 + m\omega}$, все точки которого удовлетворяют неравенству $t > t_0$. Следовательно, при $t \geqslant t_0 + m\omega$ выполняется тождество

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} \equiv f(t,\ \varphi(t),\ \varphi(t - \Delta(t))).$$

В силу периодичности левой и правой частей это тождество не нарушится при замене t на $t-m\omega$, если считать в правой части вектор-функцию $\varphi(t)$ периодически продолженной на E_{t_0}.

В дальнейшем, если это не оговорено, будем изучать только такие периодические решения, определяемые начальными вектор-функциями, которые являются периодическим продолжением периодического решения на начальное множество.

§ 2. АЛГОРИТМ ОТЫСКАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Предположим, что система (1.1) имеет периодическое с периодом ω решение и известна точка $x_0 \in D - M\omega/2$, через которую это решение проходит в момент времени $t=t_0=0$. Тогда алгоритм отыскания этого решения устанавливает [61]

Теорема 1.1. *Пусть $x(t)=\varphi(t)$ — периодическое по t с периодом ω решение системы (1.1), удовлетворяющей условиям 1, 2 (см. с. 11). Тогда справедливо соотношение*

$$\varphi(t) = \lim_{m\to\infty} x_m(t, x_0), \tag{2.1}$$

равномерно сходящееся относительно $-\infty < t < \infty$, $x_0 \in D - M\omega/2$ и

$$|\varphi(t) - x_m(t, x_0)| \leqslant Q^m (E-Q)^{-1} \frac{M\omega}{2} \tag{2.2}$$

для всех $m=0, 1, 2, \ldots$, где $x_m(t, x_0)$ $(x_0(t, x_0)=x_0)$ являются периодическими с периодом ω функциями, определяемыми соотношением

$$x_m(t, x_0) = x_0 + \int_0^t [f(t, x_{m-1}(t, x_0), x_{m-1}(t-\Delta, x_0)) - \overline{f(t, x_{m-1}(t, x_0), x_{m-1}(t-\Delta, x_0))}]\,dt. \tag{2.3}$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций

$$x_1(t, x_0) = x_0 + \int_0^t [f(t, x_0, x_0) - \overline{f(t, x_0, x_0)}]\,dt;$$

$$x_2(t, x_0) = x_0 + \int_0^t [f(t, x_1(t, x_0), x_1(t-\Delta, x_0)) - \overline{f(t, x_1(t, x_0), x_1(t-\Delta, x_0))}]\,dt;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_m(t, x_0) = x_0 + \int_0^t [f(t, x_{m-1}(t, x_0), x_{m-1}(t-\Delta, x_0)) - \overline{f(t, x_{m-1}(t, x_0), x_{m-1}(t-\Delta, x_0))}]\,dt.$$

Каждая из них является периодической по t функцией с периодом ω. Более того, при $x_0 \in D$ в силу леммы 1.1 для $0 \leqslant t \leqslant \omega$

$$|x_m(t, x_0) - x_0| \leqslant 2Mt(1 - t/\omega) = \alpha_1(t) M, \tag{2.4}$$

где $\alpha_1(t) = 2t(1 - t/\omega)$. Поскольку при $0 \leqslant t \leqslant \omega$ $\alpha_1(t) \leqslant \omega/2$, то из неравенства (2.4) получаем неравенство

$$|x_m(t, x_0) - x_0| \leqslant M\omega/2,$$

т. е. $x_m(t, x_0) \in D$ при $x_0 \in D - M\omega/2$, $0 \leqslant t \leqslant \omega$.

По индукции заключаем, что для всех $m=0, 1, 2, \ldots$ и каждого $x_0 \in D - M\omega/2$ функции $x_m(t, x_0)$ существуют, являются периодическими по t с периодом ω и принадлежат области D.

Используя неравенства (1.2), (1.3) и условия 1, 2, докажем сходимость последовательности $\{x_m(t, x_0)\}$. Для этого разность $x_2(t, x_0) - x_1(t, x_0)$ представим в виде

$$x_2(t, x_0) - x_1(t, x_0) = (1 - t/\omega) \int_0^t [f(t, x_1(t, x_0), x_1(t - \Delta, x_0)) - \tag{2.5}$$
$$- f(t, x_0, x_0)]\, dt - \frac{t}{\omega} \int_0^\omega [f(t, x_1(t, x_0), x_1(t - \Delta, x_0)) - f(t, x_0, x_0)]\, dt.$$

Оценивая (2.5) с учетом (2.4), находим

$$|x_2(t, x_0) - x_1(t, x_0)| \leqslant (1 - t/\omega) \int_0^t [K_1 |x_1(t, x_0) - x_0| +$$
$$+ K_2 |x_1(t - \Delta, x_0) - x_0|]\, dt + t/\omega \int_t^\omega [K_1 |x_1(t, x_0) - x_0| + \tag{2.6}$$
$$+ K_2 |x_1(t - \Delta, x_0) - x_0|]\, dt = \left[(1 - t/\omega) \int_0^t \alpha_1(t)\, dt + \frac{t}{\omega} \int_t^\omega \alpha_1(t) dt\right] K_1 M +$$
$$+ K_2 \left[(1 - t/\omega) \int_{-\Delta}^{\omega - \Delta} |x_1(t_1, x_0) - x_0|\, dt_1 + t_1/\omega \int_{t - \Delta}^{\omega - \Delta} |x_1(t_1, x_0) - x_0|\, dt_1\right]$$

для всех $0 \leqslant t \leqslant \omega$. В силу периодичности по t_1 разности $x_1(t_1, x_0) - x_0$ из оценки (2.4) получаем неравенство

$$|x_1(t_1, x_0) - x_0| \leqslant \begin{cases} \alpha_1(t_1 + \omega) M, & -\Delta \leqslant t_1 \leqslant 0, \\ \alpha_1(t_1) M, & 0 \leqslant t_1 \leqslant \omega - \Delta, \end{cases} \tag{2.7}$$

предполагая, что для значений $t \in (-\infty, \infty)$ $\alpha_1(t)$ продолжается периодически. С учетом (2.7) неравенство (2.6) принимает вид

$$|x_2(t, x_0) - x_1(t, x_0)| \leqslant \alpha_2(t) K_1 M + \beta_2(t, \Delta) K_2 M, \tag{2.8}$$

где

$$\alpha_2(t) = \left(1 - \frac{t}{\omega}\right)\int\limits_0^t \alpha_1(t)\,dt + \frac{t}{\omega}\int\limits_t^\omega \alpha_1(t)\,dt = \frac{\omega}{6}\alpha_1(t) + \frac{\alpha_1^2(t)}{3}; \tag{2.9}$$

$$\beta_2(t, \Delta) = \begin{cases} \beta_2'(t, \Delta), & 0 \leqslant t \leqslant \Delta, \\ \beta_2''(t, \Delta), & \Delta \leqslant t \leqslant \omega; \end{cases} \tag{2.10}$$

$$\beta_2'(t, \Delta) = \left(1 - \frac{t}{\omega}\right)\int\limits_{-\Delta}^{\omega-\Delta} \alpha_1(t_1 + \omega)\,dt_1 + \frac{t}{\omega}\left[\int\limits_{t-\Delta}^{0} \alpha_1(t_1 + \omega)\,dt_1 + \right.$$
$$\left. + \int\limits_0^{\omega-\Delta} \alpha_1(t_1)\,dt_1\right];$$

$$\beta_2''(t, \Delta) = \left(1 - \frac{t}{\omega}\right)\left[\int\limits_{-\Delta}^{0} \alpha_1(t_1 + \omega)\,dt_1 + \int\limits_0^{t-\Delta} \alpha_1(t_1)\,dt_1\right] +$$
$$+ \frac{t}{\omega}\int\limits_{t-\Delta}^{\omega-\Delta} \alpha_1(t_1)\,dt_1.$$

Вычисляя $\beta_2'(t, \Delta)$ и $\beta_2''(t, \Delta)$, находим

$$\begin{aligned} \beta_2'(t, \Delta) &= \alpha_2(t) + t(1 - t/\Delta)(1 - 2t/\omega)\,\alpha_1(\Delta); \\ \beta_2''(t, \Delta) &= \alpha_2(t) - \Delta(1 - \Delta/t)(1 - 2t/\omega)\,\alpha_1(t). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Оценивая $\beta_2'(t, \Delta)$ при $0 \leqslant t \leqslant \Delta$, получаем

$$\beta_2'(t, \Delta) \leqslant \alpha_2(t) \leqslant \alpha_1(t)\frac{\omega}{3}, \quad t \geqslant \frac{\omega}{2}; \tag{2.12}$$

$$\beta_2'(t, \Delta) \leqslant \alpha_2(t) + \alpha_1(t)\left(1 - \frac{2t}{\omega}\right)\frac{\alpha_1(\Delta)}{2} = \alpha_1(t)\left[\frac{\omega}{6} + \frac{\alpha_1(t)}{3} + \right.$$
$$\left. + \left(1 - \frac{2t}{\omega}\right)\frac{\alpha_1(\Delta)}{2}\right] \leqslant \alpha_1(t)\left[\frac{\omega}{3} + \frac{3\alpha_1^2(\Delta)}{8\omega}\right], \quad t \leqslant \frac{\omega}{2}. \tag{2.13}$$

Объединим неравенства (2.12) и (2.13), тогда

$$\beta_2'(t, \Delta) \leqslant \alpha_1(t)\left[\frac{\omega}{3} + \frac{3\alpha_1^2(\Delta)}{8\omega}\right], \quad 0 \leqslant t \leqslant \Delta. \tag{2.14}$$

Оценивая $\beta_2''(t, \Delta)$ при $\Delta \leqslant t \leqslant \omega$, находим

$$\beta_2''(t, \Delta) \leqslant \alpha_2(t) \leqslant \alpha_1(t)\frac{\omega}{3}, \quad t \leqslant \frac{\omega}{2}; \tag{2.15}$$

$$\beta_2''(t, \Delta) \leqslant \alpha_2(t) + \frac{\alpha_1(\Delta)}{2}\alpha_1(t)\left(\frac{2t}{\omega} - 1\right) \leqslant \alpha_1(t)\left[\frac{\omega}{6} + \frac{\alpha_1(t)}{3} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{2t}{\omega} - 1\right)\frac{\alpha_1(\Delta)}{2}\right] \leqslant \alpha_1(t)\left[\frac{\omega}{3} + \frac{3\alpha_1^2(\Delta)}{8\omega}\right], \quad t \geqslant \frac{\omega}{2}. \tag{2.16}$$

Из неравенств (2.14), (2.16) получаем

$$\beta_2''(t,\ \Delta) \leqslant \alpha_1(t)\left[\frac{\omega}{3} + \frac{3\alpha_1^2(\Delta)}{8\omega}\right], \quad 0 \leqslant t \leqslant \omega. \tag{2.17}$$

Неравенства (2.14), (2.17) приводят к оценке

$$\beta_2(t,\ \Delta) \leqslant \alpha_1(t)\left[\frac{\omega}{3} + \frac{3\alpha_1^2(\Delta)}{8\omega}\right], \quad 0 \leqslant t \leqslant \omega. \tag{2.18}$$

С учетом (2.9) и (2.18) неравенство (2.8) принимает вид

$$|x_2(t,\ x_0) - x_1(t,\ x_0)| \leqslant \alpha_1(t)\left[\frac{\omega}{3} + \frac{3\alpha_1^2(\Delta)}{8\omega}\right](K_1 + K_2)\,\mathbf{M}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \omega. \tag{2.19}$$

Пусть теперь $x_m(t,\ x_0) - x_{m-1}(t,\ x_0)$ удовлетворяет неравенству

$$|x_m(t,\ x_0) - x_{m-1}(t,\ x_0)| \leqslant \alpha_1(t)\left[\left(\frac{\omega}{3} + \frac{3\alpha_1^2(\Delta)}{8\omega}\right)(K_1 + K_2)\right]^{m-1}\mathbf{M} = \alpha_1(t)\mathbf{M}_m, \tag{2.20}$$

для всех t из отрезка $[0,\ \omega]$ и фиксированного $m \geqslant 2$. Покажем, что $x_{m+1}(t,\ x_0) - x_m(t,\ x_0)$ удовлетворяет неравенству

$$|x_{m+1}(t,\ x_0) - x_m(t,\ x_0)| \leqslant \alpha_1(t)\left[\left(\frac{\omega}{3} + \frac{3\alpha_1^2(\Delta)}{8\omega}\right)^m (K_1 + K_2)\right]^m \mathbf{M} = \alpha_1(t)\mathbf{M}_{m+1}. \tag{2.21}$$

Представляя для этого $x_{m+1}(t,\ x_0) - x_m(t,\ x_0)$ в виде

$$|x_{m+1}(t,\ x_0) - x_m(t,\ x_0)| = \left(1 - \frac{t}{\omega}\right)\int_0^t [f(t,\ x_m(t,\ x_0),\ x_m(t - \Delta,\ x_0)) -$$

$$- f(t,\ x_{m-1}(t,\ x_0),\ x_{m-1}(t - \Delta,\ x_0))]\,dt - \frac{t}{\omega}\int_t^\omega [f(t,\ x_m(t,\ x_0),\ x_m(t -$$

$$- \Delta,\ x_0)) - f(t,\ x_{m-1}(t,\ x_0),\ x_{m-1}(t - \Delta,\ x_0))]\,dt$$

и оценивая эту разность, с учетом (2.20) получаем неравенство

$$|x_{m+1}(t,\ x_0) - x_m(t,\ x_0)| \leqslant \alpha_2(t)\,K_1\mathbf{M}_m + \beta_2(t,\ \Delta)\,K_2\mathbf{M}_m \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_2(t)\left(\frac{\omega}{3} + \frac{3\alpha_1^2(\Delta)}{8\omega}\right)(K_1 + K_2)\mathbf{M}_m \leqslant \alpha_1(t)\left[\left(\frac{\omega}{3} + \frac{3\alpha_1^2(\Delta)}{8\omega}\right)(K_1 + K_2)\right]^m \mathbf{M},$$

т. е. неравенство (2.21). По индукции заключаем, что

$$|x_{m+1}(t,\ x_0) - x_m(t,\ x_0)| \leqslant \alpha_1(t)\left[\left(\frac{\omega}{3} + \frac{3\alpha_1^2(\Delta)}{8\omega}\right)(K_1 + K_2)\right]^m \mathbf{M} \tag{2.22}$$

для всех $0 \leqslant t \leqslant \omega$ и всех $m = 1,\ 2,\ \ldots$,

Так как $\alpha_1(t) \leqslant \omega/2$ для $0 \leqslant t \leqslant \omega$, а $x_m(t, x_0)$ — периодическая по t с периодом ω функция, то из неравенства (2.22) следует

$$|x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \leqslant \frac{\omega}{2}\left[\left(\frac{\omega}{3} + \frac{3\alpha_1^2(\Delta)}{8\omega}\right)(K_1 + K_2)\right]^m \mathbf{M} \quad (2.23)$$

для всех $-\infty < t < \infty$ и всех $m = 0, 1, \ldots$. Это неравенство с учетом условия 2 доказывает равномерную относительно $(t, x_0) \in (-\infty, \infty) \times (D - \mathbf{M}\omega/2)$ сходимость последовательности (2.3).

Обозначая предельную функцию последовательности $\{x_m(t, x_0)\}$ через $x_\infty(t, x_0)$ и переходя в соотношении (2.3) к пределу при $m \to \infty$, убеждаемся, что $x_\infty(t, x_0)$ — периодическое решение уравнения

$$x(t, x_0) = x_0 + \int_0^t [f(t, x(t, x_0), x(t - \Delta, x_0)) -$$

$$- \overline{f(t, x(t, x_0), x(t - \Delta, x_0))}]\, dt. \quad (2.24)$$

Кроме того, для $x_\infty(t, x_0)$ справедливы следующие оценки. Согласно лемме 1.1

$$|x_\infty(t, x_0) - x_0| \leqslant \mathbf{M}\omega/2 \quad (2.25)$$

для всех $-\infty < t < \infty$, $x_0 \in D - \mathbf{M}\omega/2$. Учитывая неравенство

$$|x_{m+k}(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \leqslant \alpha_1(t) \sum_{i=0}^{k-1} \left[\left(\frac{\omega}{3} + \frac{3\alpha_1^2(\Delta)}{8\omega}\right)(K_1 + K_2)\right]^{m+i} \mathbf{M}, \quad (2.26)$$

которое легко следует из неравенства (2.23), и условие 2, находим

$$|x_\infty(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \leqslant Q^m [E - Q]^{-1} (\mathbf{M}\omega/2), \quad (2.27)$$

где E — единичная матрица.

По условию теоремы функция $x(t) = \varphi(t)$ является периодическим решением уравнения (1.1). Это значит, что она удовлетворяет уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f[t, x(t), x(t - \Delta)]\, dt \quad (2.28)$$

и обладает свойством

$$\overline{f(t, \varphi(t), \varphi(t - \Delta))} = 0. \quad (2.29)$$

Из (2.24), (2.28), (2.29) следует, что $\varphi(t)$, как и $x_\infty(t, x_0)$, является периодическим решением уравнения (2.24). Поэтому для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что уравнение (2.24) не может иметь два различных решения. Докажем это от противного.

Пусть $x(t, x_0)$ и $y(t, x_0)$ — два различных решения уравнения (2.24). Тогда для разности $x(t, x_0)-y(t, x_0)$ при $0 \leqslant t \leqslant \omega$ получаем

$$|x(t, x_0)-y(t, x_0)| \leqslant \left(1-\frac{t}{\omega}\right)\int_0^t K_1 |x(t, x_0)-y(t, x_0)|\, dt +$$

$$+\frac{t}{\omega}\int_t^\omega K_1 |x(t, x_0)-y(t, x_0)|\, dt + \left(1-\frac{t}{\omega}\right)\int_0^t K_2 |x(t-\Delta, x_0)-y(t-$$

$$-\Delta, x_0)|\, dt + \frac{t}{\omega}\int_t^\omega K_2 |x(t-\Delta, x_0)-y(t-\Delta, x_0)|\, dt. \qquad (2.30)$$

Положив $x(t, x_0)-y(t, x_0)=r(t)$, из (2.30) находим

$$r(t) \leqslant (K_1+K_2)\left[\left(1-\frac{t}{\omega}\right)\int_0^t |r(t)|_0 dt + \frac{t}{\omega}\int_t^\omega |r(t)|_0 dt\right], \qquad (2.31)$$

откуда

$$r(t) \leqslant (K_1+K_2)\alpha_1(t)|r(t)|_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant \omega. \qquad (2.32)$$

Подставляя в правую часть неравенства (2.30) вместо $r(t)$ правую часть неравенства (2.32), получаем

$$r(t) \leqslant \left(1-\frac{t}{\omega}\right)\int_0^t K_1\alpha_1(t)(K_1+K_2)|r(t)|_0\, dt + \frac{t}{\omega}\int_t^\omega K_1\alpha_1(t)(K_1+$$

$$+K_2)|r(t)|_0\, dt + \left(1-\frac{t}{\omega}\right)\int_0^t K_2|r(t-\Delta)|\, dt + \frac{t}{\omega}\int_t^\omega K_2|r(t-\Delta)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant K_1(K_1+K_2)\alpha_2(t)|r(t)|_0 + K_2(K_1+K_2)\beta_2(t, \Delta)|r(t)|_0 \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_1(t)(K_1+K_2)^2\left(\frac{\omega}{3}+\frac{3\alpha_1^2(\Delta)}{8\omega}\right)|r(t)|_0. \qquad (2.33)$$

Подставляя в правую часть неравенства (2.30) вместо $r(t)$ правую часть неравенства (2.33) и продолжая этот процесс дальше, после n-й замены имеем

$$r(t) \leqslant \alpha_1(t)(K_1+K_2)Q^{n-1}|r(t)|_0, \qquad (2.34)$$

где Q — матрица, определенная на с. 11. Из (2.34) следует оценка

$$|r(t)|_0 \leqslant \frac{\omega}{2}(K_1+K_2)Q^{n-1}|r(t)|_0. \qquad (2.35)$$

Переходя в (2.35) к пределу при $n \to \infty$ и учитывая условие 2, получаем

$$|r(t)|_0 \leqslant 0,$$

т. е. $r(t) \equiv 0$, что и завершает доказательство теоремы 1.1.

§ 3. СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Согласно теореме 1.1 отыскание периодического решения системы (1.1) сводится к вычислению функций $x_m(t, x_0)$, если такое решение существует и известна точка x_0, через которую при $t=0$ оно проходит.

Зная $x_m(t, x_0)$, вопрос существования периодических решений можно решать следующим образом.

Обозначим

$$T(x_0) = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} f(t,\ x_\infty(t,\ x_0),\ x_\infty(t-\Delta,\ x_0))\,dt, \tag{3.1}$$

где $x_\infty(t, x_0)$ — предел последовательности периодических функций с периодом ω

$$\begin{aligned} x_m(t,\ x_0) = x_0 + \int_0^t [f(t,\ x_{m-1},(t,\ x_0),\ x_{m-1}(t-\Delta,\ x_0)) - \\ - \overline{f(t,\ x_{m-1}(t,\ x_0),\ x_{m-1}(t-\Delta,\ x_0))}]\,dt. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Так как $x_\infty(t, x_0)$ — решение уравнения

$$\begin{aligned} x_\infty(t,\ x_0) = x_0 + \int_0^t [f(t,\ x_\infty(t,\ x_0),\ x_\infty(t-\Delta,\ x_0)) - \\ - \overline{f(t,\ x_\infty(t,\ x_0),\ x_\infty(t-\Delta,\ x_0))}]\,dt, \end{aligned} \tag{3.3}$$

то при $T(x_0)=0$ функция $x_\infty(t, x_0)$ является периодическим решением системы (1.1).

Таким образом, вопрос существования периодических решений систем (1.1) связан с вопросом существования нулей функции $T(x_0)$. Точки x_0, для которых $T(x_0)=0$, являются особыми точками отображения

$$T : D - M\omega/2 \to E_n, \quad T(x_0) = \overline{f(t,\ x_\infty(t,\ x_0),\ x_\infty(t-\Delta,\ x_0))}. \tag{3.4}$$

Найти отображение (3.4) можно лишь приближенно, вычисляя, например, функции

$$T^m(x_0) = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} f(t,\ x_m(t,\ x_0),\ x_m(t-\Delta,\ x_0))\,dt. \tag{3.5}$$

Поэтому возникает следующая задача: исходя из отображения (3.5) решить вопрос о нулях отображения (3.4) и, следовательно, о периодических решениях системы (1.1). Решение этой задачи дает [61]

Теорема 1.2. *Пусть для системы*

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,\ x(t),\ x(t-\Delta)), \tag{3.6}$$

заданной в области D пространства E_n и удовлетворяющей условиям 1, 2, выполняются также следующие условия:

а) *для некоторого целого m функция $T^m(x_0)$ имеет изолированную особую точку:*

$$T^m(x_0^0) = 0;$$

б) *индекс этой точки отличен от нуля;*

в) *существует замкнутая выпуклая область D_1, принадлежащая D—$\mathbf{M}\omega/2$ и имеющая единственную особую точку x_0^0, такую, что на ее границе Γ_{D_1} справедливо неравенство*

$$\inf_{x \in \Gamma_{D_1}} \sum_{i=1}^{n} |T_i^m(x)| \geqslant \sum_{i=1}^{n} \left\{ Q^m (E - Q)^{-1} (K_1 + K_2) \frac{\mathbf{M}\omega}{3} \right\}_i. \quad (3.7)$$

Тогда система (3.6) имеет периодическое решение $x(t)$, для которого $x(0) \in D_1$.

Доказательство. По определению индекс изолированной особой точки x^0 непрерывного отображения $T^m(x_0)$ равен характеристике векторного поля, порожденного отображением T^m, на достаточно малой сфере S^n с центром в x^0. Так как в D_1 нет отличных от x^0 особых точек и D_1 гомеоморфно единичному шару E_n (см., например, [37]), то характеристика векторного поля T^m на сфере S^n равна характеристике этого же поля на Γ_{D_1}.

Поля T^m и T гомотопны на Γ_{D_1}.

Последнее следует из того, что непрерывно зависящее от параметра θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, семейство везде непрерывных на Γ_{D_1} векторных полей

$$V(\theta, x_0) = T^m(x_0) + \theta (T(x_0) - T^m(x_0)), \quad (3.8)$$

соединяющее поля $V(0, x_0) = T^m(x_0)$ и $V(1, x_0) = T(x_0)$, нигде не обращается на Γ_{D_1} в нуль.

Действительно, используя соотношения (2.27), (3.1) и (3.5), имеем

$$|T(x_0) - T^m(x_0)| \leqslant \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} [K_1 | x_m(t, x_0) - x_\infty(t, x_0)| +$$

$$+ K_2 | x_m(t - \Delta, x_0) - x_\infty(t - \Delta, x_0)|] \, dt \leqslant Q^m [E - Q]^{-1} \left\{ \frac{K_1}{\omega} \int_0^{\omega} \alpha_1(t) dt + \right.$$

$$\left. + \frac{K_2}{\omega} \left[\int_{-\Delta}^{0} \alpha_1(t_1 + \omega) \, dt_1 + \int_0^{\omega - \Delta} \alpha_1(t_1) dt_1 \right] \right\} \mathbf{M} = Q^m (E - Q)^{-1} (K_1 + K_2) \frac{\mathbf{M}\omega}{3}. \quad (3.9)$$

Следовательно, на Γ_{D_1} выполняется неравенство

$$\| V(\theta, x_0) \| \geqslant \| T^m(x_0) \| - \| T^m(x_0) - T(x_0) \| > 0. \quad (3.10)$$

Поскольку характеристики гомотопных на компакте полей равны между собой [36, 37], то характеристика на Γ_{D_1} поля T равна индексу особой точки x^0 поля T^m и отлична, следовательно, от нуля. В силу теоремы 5.12 из работы [1] этого достаточно, чтобы утверждать, что векторное поле T имеет в D_1 особую точку, т. е. точку x_0^0, для которой

$$T(x_0^0) = 0. \tag{3.11}$$

Таким образом, существует точка x_0^0, для которой $T(x_0^0) = 0$, следовательно, существует периодическое решение системы (3.6).

Применение теоремы для каждой конкретной системы требует вычисления индекса особой точки и нахождения области D_1, на границе которой выполняется неравенство (3.7).

Для плоскости, т. е. при $E_n = E_2$, вычисление индекса всегда осуществимо (см., например, [37]). Для пространства размерности больше двух подсчет индекса затрудняется. Однако и в этом случае имеется ряд критериев, позволяющих заключить, отличен ли индекс от нуля. Так, в частности, если правая часть системы (3.6) дифференцируема в окрестности точки x^0 и $\det \left\| \frac{dT^m(x_0)}{dx} \right\| \neq 0$, то индекс точки x^0 отличен от нуля. Более того, индекс точки x^0 отличен от нуля и тогда, когда $T^m(x^0)$ непрерывно и взаимооднозначно отображает окрестность точки x^0 на ее образ. Индекс особой точки можно вычислить и в n-мерном случае, если векторное поле непрерывно дифференцируемо (см., например, [101]).

Выбор области D_1, на границе которой должно выполняться неравенство (3.7), может быть несколько произвольным. В частности, для периодических по времени систем стандартного вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = \varepsilon X(t, x(t), x(t-\Delta)), \quad \Delta > 0, \tag{3.12}$$

где ε — малый положительный параметр, областью D_1 в случае изолированной особой точки может служить любой достаточно малый шар с центром в особой точке.

В силу сказанного вопрос существования периодических решений системы (3.12) решается следующим утверждением [61].

Теорема 1.3. *Пусть правая часть системы (3.12) определена в области*

$$-\infty < t < \infty, \quad (x, y) \in D \times D, \tag{3.13}$$

является периодической по t с периодом ω, непрерывна по совокупности переменных t, x, y и удовлетворяет неравенствам

$$\begin{gathered} |X(t, x, y)| \leqslant M, \\ |X(t, x_1, y_1) - X(t, x_2, y_2)| \leqslant K_1 |x_1 - x_2| + K_2 |y_1 - y_2|. \end{gathered} \tag{3.14}$$

Тогда если усредненная система

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \varepsilon X_0(\xi(t),\ \xi(t-\Delta)),$$
$$\left(X_0(x,\ y)) = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} X(t,\ x,\ y)\,dt\right) \tag{3.15}$$

имеет изолированное положение равновесия $\xi = \xi_0$:

$$X_0(\xi_0,\ \xi_0) = 0 \tag{3.16}$$

и индекс точки ξ_0 *отображения* $X(\xi_0,\ \xi_0)$ *отличен от нуля, то система (3.12) имеет при достаточно малых* ε *периодическое с периодом* ω *решение.*

Теорема 1.3 обосновывает принцип усреднения для уравнений с запаздывающим аргументом стандартного вида.

Для случая, когда $E_n = E_1$, т. е. когда x — скалярная величина, теорему 1.2 можно усилить, отказавшись от требования изолированности особой точки.

Теорема 1.4 [61]. *Пусть в уравнении*

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,\ x(t),\quad x(t-\Delta)) \tag{3.17}$$

правая часть является периодической по t *с периодом* ω, *непрерывной по совокупности переменных* $t,\ x,\ y$, *определенной в области* $-\infty < t < \infty$, $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$ *и удовлетворяет неравенствам*

$$|f(t,\ x,\ y)| \leqslant M,$$
$$|f(t,\ x_1,\ y_1) - f(t,\ x_2,\ y_2)| \leqslant k_1|x_1 - x_2| + k_2|y_1 - y_2|,$$
$$q = (k_1 + k_2)\ \frac{\omega}{3} + \frac{3}{2\omega}\Delta^2\left(1 - \frac{\Delta}{\omega}\ ^2\right) < 1;$$

кроме того, для некоторого $m \geqslant 1$ *функция (3.5) удовлетворяет неравенствам*

$$\min_{a+\frac{\omega}{2}M \leqslant x \leqslant b-\frac{\omega}{2}M} T^{(m)}(x) \leqslant -\frac{q^m}{1-q}(k_1 + k_2)\frac{M\omega}{3},$$
$$\max_{a+\frac{\omega}{2}M \leqslant x \leqslant b-\frac{\omega}{2}M} T^m(x) \geqslant \frac{q^m}{1-q}(k_1 + k_2)\frac{M\omega}{3}. \tag{3.18}$$

Тогда уравнение (3.17) имеет периодическое решение $x = x(t)$, *для которого* $a + \mathbf{M}\omega/2 \leqslant x(0) \leqslant b - \mathbf{M}\omega/2$.

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 — точки отрезка $[a + \frac{\omega}{2}M,\ b - \frac{\omega}{2}M]$ такие, что

$$T^m(x_1) = \min_{a+\frac{\omega}{2}M \leqslant x \leqslant b-\frac{\omega}{2}M} T^m(x),\quad T^m(x_2) = \max_{a+\frac{\omega}{2}M \leqslant x \leqslant b-\frac{\omega}{2}M} T^m(x).$$

Учитывая неравенства (3.9) и (3.18), имеем

$$T(x_1) = T^m(x_1) + (T(x_1) - T^m(x_1)) \leqslant 0,$$
$$T(x_2) = T^m(x_2) + (T(x_2) - T^m(x_2)) \geqslant 0. \qquad (3.19)$$

В силу непрерывности $T(x)$ из (3.19) следует существование точки x^0, $x^0 \in [x_1, x_2]$, такой, что $T(x^0)=0$. Это означает, что уравнение (3.17) имеет периодическое с периодом ω решение.

§ 4. ОТЫСКАНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Допустим, что существование периодического решения системы (1.1) установлено. Тогда отыскание периодического решения сводится к вычислению функций $x_m(t, x_0)$ последовательности (2.3) и отысканию точки x_0, через которую в начальный момент времени $t=t_0=0$ проходит данное решение. При вычислении $x_m(t, x_0)$ необходимо интегрировать периодические функции. Для этого можно предложить следующую вычислительную схему.

Аппроксимируем $f(t, x, y)$ какой-либо периодической функцией $P(t, x, y)$, полиномиальной относительно $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$:

$$P(t, x, y) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i(t) P_i(x, y), \qquad (4.1)$$

где $P_i(x, y)$ — полиномы от x, y, $\alpha_i(t)$ — периодические функции, причем отклонение $f(t, x, y)$ от $P(t, x, y)$ не превосходит $a=(a_1, a_2, \dots, a_n)$:

$$|f(t, x, y) - P(t, x, y)| \leqslant a. \qquad (4.2)$$

Вычисляем интегралы

$$\bar{a}_0^i = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} \alpha_i(t)\,dt,$$

$$\bar{a}_k^i = \frac{2}{\omega}\int_0^{\omega} k^2\alpha_i(t)\cos k\omega_1 t\,dt, \qquad (4.3)$$

$$\bar{b}_k^i = \frac{2}{\omega}\int_0^{\omega} k^2\alpha_i(t)\sin k\omega_1 t\,dt, \qquad \omega_1 = \frac{2\pi}{\omega},$$

для $k = 1, 2, \dots, N_i$. По найденным значениям $\bar{a}_k^i$, $\bar{b}_k^i$ строим выражение

$$P_1(t, x, y) = \sum_{i=1}^{l}\left\{\bar{a}_0^i + \sum_{k=1}^{N_i} \frac{\bar{a}_k^i}{k^2}\cos k\omega_1 t + \frac{\bar{b}_k^i}{k^2}\sin k\omega_1 t\right\} P_i(x, y). \qquad (4.4)$$

Функции $x_m(t, x_0)$ последовательности (2.3) находим теперь по формуле

$$x_m(t, x_0) = x_m(t) \approx x_m^1(t) = x_0 + \int_0^t [P_1(t, x_{m-1}^1(t), x_m^1(t-\Delta)) - \overline{P_1(t, x_{m-1}^1(t), x_{m-1}^1(t-\Delta))}]\,dt. \tag{4.5}$$

Удобство предлагаемой схемы состоит в том, что для вычисления $x^1{}_m(t)$ требуется производить интегрирование тригонометрических полиномов для всех x_0.

Вычислим оценку точности приближения $x_m(t)$, найденного по предлагаемой схеме. Пусть функции $\alpha_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, l$, дважды кусочно-дифференцируемы, причем

$$\left|\frac{d^2\alpha_i(t)}{dt^2}\right| \leqslant L_i, \quad L_i = L_{i1}, L_{i2}, \ldots, L_{in}; \tag{4.6}$$

$$b = \max_{t, x\in D, y\in D} |P(t, x) - P_1(t, x)| < \sum_{i=1}^{l}\left[\delta_i\left(1 + \frac{\pi^3}{3}\right) + \frac{L_i(2N+1)}{\omega_1^2 N_i(N_i+1)}\right] P_i, \quad b = (b_1, b_2, \ldots, b_n); \tag{4.7}$$

$P_i = \max\limits_{x\in D,\, y\in D} |P_i(x, y)|$; δ_i — ошибка вычисления интегралов (4.3). Неравенство (4.7) следует из разложения

$$P(t, x) - \overline{P(t, x)} = \sum_{i=1}^{l}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^i}{k^2}\cos k\omega_1 t - \frac{b_k^i}{k^2}\sin k\omega_1 t\right\} P_i(x, y)$$

и оценки

$$|a_k^i| + |b_k^i| \leqslant \frac{2L_i}{\omega_1^2}.$$

Учитывая соотношения (2.3), (4.2), (4.5) и (4.7), получаем

$$|x_m(t) - x_m^1(t)| \leqslant \alpha_1(t)(a+b) + \left(1 - \frac{t}{\omega}\right)\int_0^t K_1 |x_m(t) - x_{m-1}^1(t)|\,dt + \frac{t}{\omega}\int_t^{\omega} K_1 |x_{m-1}(t-\Delta) - x_{m-1}^1(t-\Delta)| + \left(1 - \frac{t}{\omega}\right)\int_0^t K_2 |x_{m-1}(t-\Delta) - x_{m-1}^1(t-\Delta)|\,dt + \frac{t}{\omega}\int_0^{\omega} K_2 |x_{m-1}(t-\Delta) - x_{m-1}^1(t-\Delta)|\,dt \tag{4.8}$$

для всех $m \geqslant 1$, если $x'_m(t) \in D$, $0 \leqslant t \leqslant \omega$, $x_0 \in D - \frac{M+a+b}{2}\omega$. Из (4.8) получаем оценку

$$|x_m(t) - x^1_m(t)| \leqslant \Big\{\alpha_1(t) + \alpha_1(t)\Big[(K_1+K_2)\Big(\frac{\omega}{3} + \frac{3}{2\omega}\Delta^2\Big(1-\frac{\Delta}{\omega}\Big)^2\Big] + \ldots$$

$$\ldots + \alpha_1(t)\Big[(K_1+K_2)\Big(\frac{\omega}{3} + \frac{3}{2\omega}\Delta^2\Big(1-\frac{\Delta}{\omega}\Big)^2\Big]^{m-1}\Big\}(a+b). \quad (4.9)$$

Таким образом,

$$|x_m(t) - x^1_m(t)| \leqslant \Big\{\sum_{i=1}^{m-1}\Big[(K_1+K_2)\Big(\frac{\omega}{3} + \frac{3}{2\omega}\Big(1-\frac{\Delta}{\omega}\Big)^2\Big]^i\Big\}(a+b)\frac{\omega}{2}. \quad (4.10)$$

Функцию $x^1_m(t)$ будем принимать за вычисленное m-е приближение к периодическому решению $\varphi(t)$ системы (1.1), проходящему через точку x_0. Согласно (2.27) отклонение этого решения $x = \varphi(t)$ от $x^1_m(t)$ оценивается неравенством

$$|\varphi(t) - x^1_m(t)| \leqslant |\varphi(t) - x_m(t, x_0)| + |x_m(t, x_0) - x^1_m(t, x_0)| \leqslant$$

$$\leqslant Q^m(E-Q)^{-1}\frac{M\omega}{2} + \sum_{i=0}^{m-1} Q^i(a+b)\frac{\omega}{2}. \quad (4.11)$$

Отыскание точки x_0, через которую проходит периодическое решение при $t=t_0=0$, представляет собой трудоемкую задачу. Однако существуют частные случаи, когда ее решение становится достаточно простым. Один из таких случаев указывает [61]

Теорема 1.5. *Пусть правая часть системы*

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\Big((t, x(t), x\Big(t - \frac{\omega}{2}\Big)\Big) \quad (4.12)$$

определена в области

$$-\infty < t < \infty, \quad x \in D, \quad y \in D \quad (4.13)$$

и удовлетворяет следующим условиям:

1) функция $f(t, x, y)$ является периодической по t с периодом ω, ограничена и удовлетворяет условию Липшица по x, y с матрицами K_1 и K_2:

$$|f(t, x, y)| \leqslant M,$$
$$|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \leqslant K_1|x_1 - x_2| + K_2|y_1 - y_2|; \quad (4.14)$$

2) для любых $(x, y) \in D \times D$ и всех $-\infty < t < \infty$

$$f(t, x, y) = -f(-t, x, y). \quad (4.15)$$

Тогда через любую точку $x_0 \in D - M\omega/2$ при $t=0$ проходит периодическое с периодом ω решение $x=x(t, x_0)$ системы (4.12).

Доказательство. Предположим, что $x_0 \in D - \mathbf{M}\omega/2$. Тогда первое приближение к периодическому решению системы (4.12) определяется формулой

$$x_1(t) = x_0 + \int_0^t f(t, x_0, x_0)\, dt = x_0 + \int_0^t [f(t, x_0, x_0) - \overline{f(t, x_0, x_0)}]\, dt = x(t+\omega), \qquad (4.16)$$

поскольку $f(t, x_0, x_0)$ — нечетная функция и, следовательно, $\overline{f(t, x_0, x_0)} = 0$. Кроме того, $x_1(t) = x_1(-t)$ как интеграл от нечетной функции, и в силу леммы 1.1 справедлива оценка $|x_1(t) - x_0| \leqslant \mathbf{M}\omega/2$, т. е. $x_1(t) \in D$.

Докажем, что $f(t, x_1(t), x_1(t-\omega/2))$ является нечетной функцией. Это следует из соотношения

$$f(-t, x_1(-t), x_1(-t-\omega/2)) = f(-t, x_1(t), x_1(t+\omega/2)) =$$
$$= f(-t, x_1(t), x_1(t-\omega/2)) = -f(t, x_1(t), x_1(t-\omega/2)). \qquad (4.17)$$

Так как функция $f(t, x_1(t), x_1(t-\omega/2))$ является периодической и нечетной, то $\overline{f\left((t, x_1(t), x_1\left(t - \frac{\omega}{2}\right)\right)} = 0$, а значит,

$$x_2(t) = x_0 + \int_0^t f(t, x_1(t), x_1(t-\omega/2))\, dt =$$
$$= x_0 + \int_0^t [f(t, x_1(t), x_1(t-\omega/2)) - \overline{f(t, x_1(t), x_1(t-\omega/2))}]\, dt =$$
$$= x_2(t+\omega),$$
$$x_2(t) = x_2(-t), \quad |x_2(t) - x_0| \leqslant \mathbf{M}\omega/2.$$

По индукции легко заключить, что для всех $m \geqslant 1$ функции $x_m(t)$, вычисляемые по формуле

$$x_m(t) = x_0 + \int_0^t f(t, x_{m-1}(t), x_{m-1}(t-\omega/2))\, dt, \qquad (4.18)$$

являются периодическими по t с периодом ω, удовлетворяют соотношению $x_m(t) = x_m(-t)$ и неравенству

$$|x_m(t) - x_0| \leqslant \mathbf{M}\omega/2. \qquad (4.19)$$

Из оценки (4.19) следует равномерная ограниченность семейства $x_m(t)$, а из соотношения (4.18) — равностепенная непрерывность этого семейства.

По теореме Арцела заключаем, что из последовательности $\{x_m(t)\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность

$$\{x_{m_k}\} : x_{m_k} \underset{k\to\infty}{\rightarrow} x(t). \qquad (4.20)$$

Переходя в (4.18) к пределу, убеждаемся, что предельная функция $x(t)$ подпоследовательности (4.20) является периодическим решением системы (4.12), причем таким, что $x(0)=x_0$. Следовательно, теорема 1.5 утверждает, что область $D-\mathbf{M}\omega/2$ состоит из начальных значений периодических решений.

В общем случае отыскание начальных значений периодических решений системы (1.1) следует производить численным методом. При этом важна [61]

Теорема 1.6. *Пусть*

$$T(x_0) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega f(t, x_\infty(t, x_0), x_\infty(t-\Delta, x_0))\, dt, \tag{4.21}$$

где $x_\infty(t, x_0)$ *— предел последовательности (2.3). Тогда для всех* $-\infty < t < \infty$, $x_0 \in D-\mathbf{M}\omega/2$, $x_0' \in D-\mathbf{M}\omega/2$ *выполняются неравенства*

$$\begin{gathered} |T(x_0)| \leqslant \mathbf{M}, \\ |T(x_0)-T(x_0')| \leqslant (K_1+K_2)\left[E + \frac{(K_1+K_2)\,\omega}{3} + \right. \\ \left. + \frac{(K_1+K_2)\,\omega}{3} Q(E-Q)^{-1}\right] |x_0 - x_0'|. \end{gathered} \tag{4.22}$$

Доказательство. Согласно свойствам функции $x_\infty(t, x_0)$, установленным теоремой 1.1, функция $T(x_0)$ при $x_0 \in D-\mathbf{M}\omega/2$ является непрерывной, периодической и ограниченной. Из (4.21) следует оценка

$$\begin{gathered} |T(x_0)-T(x_0')| \leqslant \frac{K_1}{\omega}\int_0^\omega |x_\infty(t, x_0) - x_\infty(t, x_0')|\, dt + \\ + \frac{K_2}{\omega}\int_0^\omega |x_\infty(t-\Delta, x_0) - x_\infty(t-\Delta, x_0')|\, dt. \end{gathered} \tag{4.23}$$

Учитывая, что $x_\infty(t, x_0)$ удовлетворяет уравнению (3.3), находим

$$\begin{gathered} |x_\infty(t, x_0) - x_\infty(t, x_0')| \leqslant |x_0 - x_0'| + K_1\left[\left(1-\frac{t}{\omega}\right)\int_0^t |x_\infty(t, x_0) - \right. \\ \left. - x_\infty(t, x_0')|\, dt + \frac{t}{\omega}\int_t^\omega |x_\infty(t, x_0) - x_\infty(t, x_0')|\, dt\right] + \\ + K_2\left[\left(1-\frac{t}{\omega}\right)\int_0^t |x_\infty(t-\Delta, x_0) - x_\infty(t-\Delta, x_0')|\, dt + \right. \\ \left. + \frac{t}{\omega}\int_t^\omega |x_\infty(t-\Delta, x_0) - x_\infty(t-\Delta, x_0')|\, dt\right]. \end{gathered} \tag{4.24}$$

Положим $|x_\infty(t, x_0) - x_\infty(t, x_0')| = r(t)$; тогда, решая неравенство (4.24), находим

$$r(t) \leqslant [E + (K_1 + K_2)\alpha_1(t) + (K_1 + K_2) Q\alpha_1(t) + \ldots$$
$$\ldots + (K_1 + K_2) Q^{n-1}\alpha_1(t)] \, | x_0 - x_0' | + (K_1 + K_2) Q^n \alpha_1(t) \, | r(t) |_0. \quad (4.25)$$

С учетом неравенства (4.25) и условия 2 (см. с. 11) получаем

$$r(t) \leqslant \left[E + \sum_{m=1}^{\infty} Q^{m-1} (K_1 + K_2) \alpha_1(t) \right] | x_0 - x_0' |. \quad (4.26)$$

Так как $\int\limits_0^\omega \alpha_1(t)\,dt = \omega^2/3$, то из (4.25), (4.26) следует

$$|T(x_0) - T(x_0')| \leqslant (K_1 + K_2) \left[E + \frac{(K_1 + K_2)\,\omega}{3} + \right.$$
$$\left. + \frac{(K_1 + K_2)\,\omega}{3} Q (E - Q)^{-1} \right] | x_0 - x_0' |. \quad (4.27)$$

Следствием соотношений (2.27), (3.5), теоремы 1.6 и предположения о том, что в точке $x \in D_1$ $T(x) = 0$, является [61]

Лемма 1.3. *Пусть в области D задана система (1.1) и D_1 — некоторое множество, принадлежащее $D - \mathbf{M}\omega/2$. Тогда, чтобы в D_1 нашлась точка x_0, в которой $T(x_0) = 0$, необходимо, чтобы при $t = 0$, всех целых m и любом $x_1 \in D_1$ выполнялось неравенство*

$$|T^m(x_1)| \leqslant \sup_{x \in D_1} (K_1 + K_2) \left[E + \frac{(K_1 + K_2)\,\omega}{3} + \right.$$
$$\left. + \frac{(K_1 + K_2)\,\omega}{3} Q (E - Q)^{-1} \right] | x - x_1 | + \frac{\omega}{3} (K_1 + K_2) Q^m (E - Q)^{-1} \mathbf{M}. \quad (4.28)$$

Используя лемму 1.3, для отыскания начальных значений периодических решений поступаем следующим образом. Разбиваем множество $D - \mathbf{M}\omega/2$ на конечное число подмножеств D_i. Выбираем в каждом D_i по одной точке $x = x^i$ и вычисляем $T^m(x^i)$ для некоторого m. Сравнивая $T^m(x^i)$ с правой частью неравенства (4.28), отбрасываем те из множеств D_i, для которых не выполняется это неравенство. Эти множества не должны содержать точек, через которые при $t = 0$ проходят периодические решения. Оставшиеся D_i образуют множество $\mathfrak{M}_m^{(i)}$, через точки которого только и могут проходить периодические решения системы (1.1).

Так как $\mathfrak{M}_m^{(i)}$ при $i \to \infty$, $m \to \infty$ стремится к множеству $\mathfrak{M}$ начальных значений периодических решений, то любую точку $x_1 \in \mathfrak{M}_m^{(i)}$ можно принять за m-е приближение к начальному значению x_0 периодического решения. При этом точность нахождения x_0 определяется неравенством

$$|x_1 - x_0| \leqslant \sup_{x \in \mathfrak{M}_m^{(i)}} |x_1 - x|. \quad (4.29)$$

§ 5 ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В качестве примера приложения изложенных выше результатов рассмотрим следующую задачу. Для механической системы, движение которой описывается системой уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t-\Delta)) - u \tag{5.1}$$

с периодической по t периода ω правой частью и постоянным управлением $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, требуется выбрать управление u таким образом, чтобы траектория, проходящая в заданный момент времени $t = t_0 = 0$ через заданную точку x_0, была периодической с периодом ω.

Если функция $f(t, x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1 в области $-\infty < t < \infty$, $x \in D$, $y \in D$ и точка $x_0 \in D - M\omega/2$, то такое управление существует, единственно, определяется соотношением

$$u = \overline{f(t, x_\infty(t, x_0), x_\infty(t-\Delta, x_0))} \tag{5.2}$$

и может быть приближенно найдено по формуле

$$u_m = \overline{f(t, x_m(t, x_0), x_m(t-\Delta, x_0))}, \tag{5.3}$$

где $x_m(t, x_0)$ определяются рекуррентным соотношением (2.3), а $x_\infty(t, x_0)$ — предельная функция последовательности $\{x_m(t, x_0)\}$.

Докажем единственность управления u. Допустим противное: существуют такие управления $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$, причем $u^{(1)} \neq u^{(2)}$, что решения $x(t, x_0, u)$ системы (5.1), проходящие при $t = t_0 = 0$ через точку x_0, являются периодическими с периодом ω при $u = u^{(1)}$ и $u = u^{(2)}$. Тогда

$$\begin{aligned} |x(t, x_0, u^{(1)}) - x(t, x_0, u^{(2)})| \leqslant K_1 \Bigg[(1 - t/\omega) \int_0^t |x(t, x_0, u^{(1)}) - \\ - x(t, x_0, u^{(2)})|\, dt + (t/\omega) \int_t^\omega |x(t, x_0, u^{(1)}) - x(t, x_0, u^{(2)})|\, dt \Bigg] + \\ + K_2 \Bigg[(1 - t/\omega) \int_0^t |x(t-\Delta, x_0, u^{(1)}) - x(t, x_0, u^{(2)})|\, dt + \\ + (t/\omega) \int_t^\omega |x(t-\Delta, x_0, u^{(1)}) - x(t-\Delta, x_0, u^{(2)})|\, dt \Bigg]. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Положив $|x(t, x_0, u^{(1)}) - x(t, x_0, u^{(2)})| = r(t)$, из неравенства (5.4) получим оценку

$$|r(t)| \leqslant \alpha_1(t)(K_1 + K_2)\dot{Q}^{n-1} |r(t)|_0, \tag{5.5}$$

из которой следует неравенство

$$|r(t)|_0 \leqslant (\omega/2)(K_1 + K_2) Q^{n-1} |r(t)|_0. \tag{5.6}$$

Учитывая условие 2 (см. с. 11), из неравенства (5.6) находим $|r(t)|_0=0$, и, следовательно, $u^{(1)}=u^{(2)}$. Из теоремы 1.6 следует устойчивость этого управления, заключающаяся в том, что малое изменение начальной точки x_0 требует малого изменения управления u. Отклонение точного управления u от его m-го приближения u_m оценивается неравенством

$$|u-u_m| \leqslant (K_1+K_2)\,Q^m\,(E-Q)^{-1}\,(\mathbf{M}\omega/3). \tag{5.7}$$

§ 6. ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА

Общие положения изложенного выше метода проиллюстрируем на следующем примере. Пусть правая часть уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = \varepsilon\,[x^2(t) - \sin t - \cos t\,x(t-\Delta) + 0{,}001], \quad \varepsilon \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \Delta \leqslant 2\pi, \tag{6.1}$$

т. е. функция

$$f(t, x, y) = \varepsilon\,(x^2 - \sin t - y\cos t + 0{,}001),$$

удовлетворяет в области

$$|x| \leqslant 0{,}25, \quad |y| \leqslant 0{,}25 \tag{6.2}$$

неравенствам

$$\begin{gathered} |f(t, x, y)| \leqslant 1{,}32\varepsilon, \\ |f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \leqslant \varepsilon\,(0,5\,|x_1-x_2| + |y_1-y_2|). \end{gathered} \tag{6.3}$$

Уравнение (6.1) удовлетворяет условиям теоремы 1.2 в области (6.2) для всех ε, удовлетворяющих неравенству $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 0{,}06$.

Всякое периодическое с периодом 2π решение уравнения (6.1), проходящее при $t=0$ через точку x_0 области

$$|x_0| \leqslant 0{,}25\,(1-5{,}28\pi\varepsilon), \tag{6.4}$$

есть предел равномерно сходящейся последовательности функций

$$x_m(t) = x_0 + \varepsilon(\cos t - 1) + \varepsilon\int_0^t \{[x^2_{m-1}(t) - \cos t\,x_{m-1}(t-\Delta)] - \\ - [\overline{x^2_{m-1}}(t) - \overline{\cos t\,x_{m-1}(t-\Delta)}]\}\,dt, \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{6.5}$$

Вычисляя $x_m(t)$, находим: в первом приближении

$$x_1(t) = x_0 + \varepsilon(\cos t - 1 - \sin t\,x_0); \tag{6.6}$$

во втором приближении

$$x_2(t) = x_0 + \varepsilon(\cos t - x_0\sin t - 1) + \varepsilon^2\Big(2x_0\sin t - 2x_0 + \frac{\sin 2t}{4} - \\ - \frac{\sin(2t-\Delta)}{4} - \frac{\sin\Delta}{4} + \sin t - \frac{x_0}{4}\cos(2t-\Delta) + \frac{x_0}{4}\cos\Delta\Big) + \\ + \varepsilon^3\left(-2\sin t - \frac{x_0^2}{4}\sin 2t - \frac{x_0}{2}\cos 2t - \frac{3}{2}x_0 - 2x_0\cos t\right). \tag{6.7}$$

Для решения вопроса существования периодических с периодом 2π решений уравнения (6.1) подсчитаем $T^m(x_0)$:

$$T^{(0)}(x_0) = \varepsilon(x_0^2 + 0{,}001),$$
$$T^{(1)}(x_0) = \varepsilon\left[\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)x_0^2 - \varepsilon\left(2 + \frac{\sin\Delta}{2}\right)x_0 + 0{,}001 + \varepsilon\,\frac{3\varepsilon - \cos\Delta}{2}\right]. \quad (6.8)$$

Из соотношения (6.8) следует, что $T^0(x_0) \neq 0$, а $T^{(1)}(x_0) = 0$ при

$$x_0^{(1,2)} = \frac{(4 + \sin\Delta)\varepsilon \pm \sqrt{(4 + \sin\Delta)^2\varepsilon^2 - 4(\varepsilon^2 + 2)(0{,}002 + 3\varepsilon^2 - \varepsilon\cos\Delta)}}{2 + \varepsilon^2}. \quad (6.9)$$

При достаточно малых ε, удовлетворяющих неравенству

$$(4 + \sin\Delta)^2\varepsilon^2 < 4(\varepsilon^2 + 2)(0{,}002 + 3\varepsilon^2 - \varepsilon\cos\Delta), \quad (6.10)$$

не существует периодических с периодом 2π решений уравнения (6.1) при любом $0 \leqslant \Delta \leqslant 2\pi$. Если $\cos\Delta > 0{,}002/\varepsilon + 3\varepsilon$, то всегда существуют действительные решения уравнения $T^{(1)}(x_0) = 0$, причем $x_0^{(1)}$ и $x_0^{(2)}$ имеют разные знаки.

Положим $\varepsilon = 0{,}01$ и $\cos\Delta > 0{,}23$. Тогда положительный корень $x_0^{(1)}$ уравнения $T^{(1)}(x_0) = 0$ не выходит из области

$$|x_0^{(1)}| < 0{,}25(1 - 5{,}28\cdot 0{,}01\pi), \quad (6.11)$$

является изолированным и его индекс отличен от нуля.

Примем за D_1 отрезок

$$0 \leqslant x_0 \leqslant 0{,}2. \quad (6.12)$$

Тогда на его границе

$$\inf_{x \in \Gamma_D} |T^{(1)}(x)| = \inf[|T^{(1)}(0)|, |T^{(1)}(0,2)|] = 0{,}01\,|0{,}00115 - 0{,}05\cos\Delta|. \quad (6.13)$$

Правая часть неравенства (3.7) ограничена сверху величиной $0{,}01 \times \times 0{,}002$:

$$Q(E - Q)^{-1}(K_1 + K_2)\frac{M\omega}{3} \leqslant 0{,}01\cdot 0{,}002.$$

Условия теоремы 1.2 выполняются, лишь только

$$0{,}01\,|(0{,}00115 - 0{,}05\cos\Delta)| \geqslant 0{,}01\cdot 0{,}002, \text{ т. е. } \Delta < 5\pi/18.$$

Отсюда заключаем, что при $\varepsilon = 0{,}01$ для всех Δ из отрезков $0 \leqslant \Delta \leqslant 5\pi/18$, $31\pi/18 \leqslant \Delta \leqslant 2\pi$ через точку x_0, близкую к $x_0^{(1)}(\Delta)$, проходит при $t = 0$ периодическое с периодом 2π решение уравнения (6.1). Первые и вторые приближения этого периодического решения имеют вид (6.6), (6.7), если в них вместо x_0 положить решение $x_0 = x_0^{(1)}(\Delta)$, определяемое формулой (6.9).

§ 7. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = f\left(t,\ x(t),\ x(t-\Delta),\ \frac{dx(t)}{dt},\ \frac{dx(t-\Delta)}{dt}\right). \tag{7.1}$$

Это уравнение всегда можно свести к системе дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, а для исследования ее периодических решений использовать приведенную выше теорию. Однако более эффективно, с точки зрения практической реализации, применить изложенные ранее результаты непосредственно к уравнению (7.1).

Предположим, что правая часть уравнения (7.1) определена в области

$$\begin{gathered} -\infty < t < \infty, \quad a \leqslant x(t) \leqslant b, \quad a \leqslant x(t-\Delta) = x_\Delta \leqslant b, \\ c \leqslant y = \frac{dx(t)}{d^t} \leqslant d, \quad c \leqslant \frac{dx(t-\Delta)}{dt} = y_\Delta \leqslant d, \end{gathered} \tag{7.2}$$

является периодической по t с периодом ω, непрерывна по совокупности переменных t, x, x_Δ, y, y_Δ и удовлетворяет неравенствам

$$|f(t, x, x_\Delta, y, y_\Delta)| \leqslant M; \tag{7.3}$$

$$\begin{gathered} |f(t, x_1, x_{1\Delta}, y_1, y_{1\Delta}) - f(t, x_2, x_{2\Delta}, y_2, y_{2\Delta})| \leqslant K_1|x_1 - x_2| + \\ + K_2|x_{1\Delta} - x_{2\Delta}| + K_3|y_1 - y_2| + K_4|y_{1\Delta} - y_{2\Delta}|, \end{gathered} \tag{7.4}$$

где M, K_1, K_2, K_3, K_4 — положительные постоянные. Далее, предположим, что постоянные a, b, c, d, M, K_1, K_2, K_3, K_4, ω удовлетворяют неравенствам

$$b - a \leqslant M\omega^2/4, \quad c \leqslant -5M\omega/6 \leqslant 5M\omega/6 \leqslant d; \tag{7.5}$$

$$q = (\omega^2/4)(K_1 + K_2) + (5\omega/6)(K_3 + K_4) < 1. \tag{7.6}$$

Для периодической по t с периодом ω функции $f(t)$ введем оператор L по формуле

$$Lf(t) = \int_0^t [f(t) - \overline{f(t)}]\,dt. \tag{7.7}$$

Тогда

$$L^2f(t) = L(Lf(t)) = \int_0^t \left\{\int_0^t [f(t) - \overline{f(t)}]\,dt - \overline{\int_0^t [f(t) - \overline{f(t)}]\,dt}\right\} dt. \tag{7.8}$$

Очевидно, что если $f(t)$ — периодическая с периодом ω функция, то $Lf(t)$, $L^2f(t)$ также будут периодическими с периодом ω функциями, и согласно лемме 1.1 верны оценки

$$|Lf(t)| \leqslant \alpha_1(t)|f(t)|_0; \tag{7.9}$$

$$|L^2f(t)| \leqslant \alpha_1(t)|Lf(t)|_0 \leqslant \frac{\omega}{2}\alpha_1(t)|f(t)|_0 \leqslant \frac{\omega^2}{4}|f(t)|_0 \tag{7.10}$$

для всех $t \in [0, \omega]$. Алгоритм построения периодического решения уравнения (7.1) устанавливают следующие утверждения [44].

Теорема 1.7. *Пусть функция $f(t, x, x_\Delta, y, y_\Delta)$ определена в области (7.2), является периодической по t с периодом ω, непрерывна по совокупности переменных $t, x, x_\Delta, y, y_\Delta$, удовлетворяет неравенствам (7.3), (7.4) и условиям (7.5), (7.6). Тогда последовательность периодических по t с периодом ω функций*

$$x_{m+1}(t, x_0) = x_0 + L^2 f(t, x_m(t, x_0), x_m(t-\Delta, x_0), \dot{x}_m(t, x_0), \dot{x}_m(t-\Delta, x_0)) \tag{7.11}$$

сходится при $m \to \infty$ равномерно относительно

$$-\infty < t < \infty, \quad a + M\omega^2/4 \leqslant x_0 \leqslant b - M\omega^2/4. \tag{7.12}$$

Более того, предельная функция $x_\infty(t, x_0)$ определена в области (7.12), является периодической по t с периодом ω и представляет собой единственное решение уравнения

$$x(t, x_0) = x_0 + L^2 f(t, x(t, x_0), x(t-\Delta, x_0), \dot{x}(t, x_0), \dot{x}(t-\Delta, x_0)). \tag{7.13}$$

Доказательство. Полагая в соотношении (7.11) $m=0$, в силу оценки (7.9) получаем неравенство

$$|x_1(t, x_0) - x_0| \leqslant \alpha_1(t)\, |Lf(t, x_0, x_0, 0, 0)| \leqslant \alpha_1(t) \frac{M\omega}{2} \leqslant \frac{M\omega^2}{4}. \tag{7.14}$$

Продифференцируем соотношение (7.11) при $m=0$:

$$\dot{x}_1(t, x_0) = Lf(t, x_0, x_0, 0, 0) - \overline{Lf(t, x_0, x_0, 0, 0)}. \tag{7.15}$$

Мажорируя правую часть (7.15), приходим к неравенству

$$|\dot{x}_1(t, x_0)| \leqslant \alpha_1(t) M + \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \alpha_1(t) M dt \leqslant \left(\alpha_1(t) + \frac{\omega}{3}\right) M \leqslant \frac{5M\omega}{6}. \tag{7.16}$$

В силу периодичности $x_1(t, x_0)$ и $\dot{x}_1(t, x_0)$ справедливы следующие оценки:

$$|x_1(t-\Delta, x_0) - x_0| \leqslant M\omega^2/4, \quad |\dot{x}_1(t-\Delta, x_0)| \leqslant 5M\omega/6. \tag{7.17}$$

Из неравенств (7.14), (7.16), (7.17) в силу условий (7.5) следуют неравенства

$$\begin{gathered} a \leqslant x_1(t, x_0) \leqslant b, \quad a \leqslant x_1(t-\Delta, x_0) \leqslant b, \\ c \leqslant \dot{x}_1(t, x_0) \leqslant d, \quad c \leqslant \dot{x}_1(t-\Delta, x_0) \leqslant d, \end{gathered} \tag{7.18}$$

если только $a+M\omega^2/4 \leqslant x_0 \leqslant b-M\omega^2/4$. По индукции легко доказать, что функции последовательности (7.11) удовлетворяют неравенствам

$$a \leqslant x_m(t, x_0) \leqslant b, \quad a \leqslant x_1(t-\Delta, x_0) \leqslant b,$$
$$c \leqslant \dot{x}_m(t, x_0) \leqslant d, \quad c \leqslant \dot{x}_1(t-\Delta, x_0) \leqslant d \tag{7.19}$$

для всех $m=0, 1, \ldots, t \in (-\infty, \infty)$ и $a+M\omega^2/4 \leqslant x_0 \leqslant b-M\omega^2/4$.

Докажем теперь сходимость последовательности (7.11). Для этого оценим разности

$$x_2(t, x_0)-x_1(t, x_0), \quad \dot{x}_2(t, x_0)-\dot{x}_1(t, x_0).$$

Имеем

$$|x_2(t, x_0)-x_1(t, x_0)| \leqslant |L^2(f(t, x_1(t, x_0), x_1(t-\Delta, x_0), \dot{x}_1(t, x_0),$$
$$\dot{x}_1(t-\Delta, x_0))-f(t, x_0, x_0, 0, 0))| \leqslant \alpha_1(t)\frac{\omega}{2}[K_1|x_1(t, x_0)-$$
$$-x_0|_0+K_2|x_1(t-\Delta, x_0)-x_0|_0+K_3|\dot{x}_1(t, x_0)|+K_4|\dot{x}_1(t-\Delta, x_0)|_0]; \tag{7.20}$$

$$|\dot{x}_2(t, x_0)-\dot{x}_1(t, x_0)| \leqslant |L(f(t, x_1(t, x_0), x_1(t-\Delta, x_0), \dot{x}_1(t, x_0),$$
$$\dot{x}_1(t-\Delta, x_0))-f(t, x_0, x_0, 0, 0))-\overline{L(f(t, x_1(t, x_0), x_1(t-\Delta, x_0),}$$
$$\overline{\dot{x}_1(t, x_0), \dot{x}_1(t-\Delta, x_0))-f(t, x_0, x_0, 0, 0))} \leqslant \left(\alpha_1(t)+\frac{\omega}{3}\right)|f(t, x_1(t, x_0),$$
$$x_1(t-\Delta, x_0), \dot{x}_1(t, x_0), \dot{x}_1(t-\Delta, x_0))-f(t, x_0, x_0, 0, 0)|_0 \leqslant$$
$$\leqslant \left(\alpha_1(t)+\frac{\omega}{3}\right)[K_1|x_1(t, x_0)-x_0|_0+K_2|x_1(t-\Delta, x_0)-x_0|_0+$$
$$+K_3|\dot{x}_1(t, x_0)|_0+K_4|\dot{x}_1(t-\Delta, x_0)|_0]. \tag{7.21}$$

С учетом соотношений (7.14), (7.16), (7.17) неравенства (7.20), (7.21) соответственно принимают вид

$$|x_2(t, x_0)-x_1(t, x_0)| \leqslant \alpha_1(t)\frac{\omega}{2}\left[(K_1+K_2)\frac{M\omega^2}{4}+(K_3+K_4)\frac{5M\omega}{6}\right];$$
$$|\dot{x}_2(t, x_0)-\dot{x}_1(t, x_0)| \leqslant \left(\alpha_1(t)+\frac{\omega}{3}\right)M\left[(K_1+K_2)\frac{M\omega^2}{4}+\right.$$
$$\left.+(K_3+K_4)\frac{5M\omega}{6}\right]. \tag{7.22}$$

Методом полной математической индукции легко доказать, что для любого $m \geqslant 1$ выполняются такие неравенства:

$$|x_{m+1}(t, x_0)-x_m(t, x_0)| \leqslant \alpha_1(t)\frac{M\omega}{2}Q^m; \tag{7.23}$$

$$|\dot{x}_{m+1}(t, x_0)-\dot{x}_m(t, x_0)| \leqslant \left(\alpha_1(t)+\frac{\omega}{3}\right)MQ^m, \tag{7.24}$$

где

$$Q=(K_1+K_2)\frac{\omega^2}{4}+(K_3+K_4)\frac{5\omega}{6}.$$

Из этих соотношений следуют оценки

$$\begin{gathered}|x_{m+1}(t, x_0)-x_m(t, x_0)|_0\leqslant\frac{M\omega^2}{4}Q^m,\\ |x_{m+1}(t-\Delta, x_0)-x_m(t-\Delta, x_0)|_0\leqslant\frac{M\omega^2}{4}Q^m;\end{gathered}\tag{7.25}$$

$$\begin{gathered}|\dot{x}_{m+1}(t, x_0)-\dot{x}_m(t, x_0)|_0\leqslant\frac{5M\omega}{6}Q^m,\\ |\dot{x}_{m+1}(t-\Delta, x_0)-\dot{x}_m(t-\Delta, x_0)|_0\leqslant\frac{5M\omega}{6}Q^m\end{gathered}\tag{7.26}$$

для всех $0\leqslant t\leqslant\omega$, $m=0, 1, 2, \ldots$. Поскольку функции $x_m(t, x_0)$, $\dot{x}_m(t, x_0)$ являются периодическими по t с периодом ω, то неравенства (7.25), (7.26) имеют место для всех $-\infty<t<\infty$ и $m=0, 1, 2, \ldots$.

В силу неравенств (7.25), (7.26) и условия (7.6) последовательности периодических функций $\{x_m(t, x_0)\}$, $\{\dot{x}_m(t, x_0)\}$ равномерно сходятся:

$$\lim_{m\to\infty}x_m(t, x_0)=x_\infty(t, x_0),\quad \lim_{m\to\infty}\dot{x}_m(t, x_0)=\dot{x}_\infty(t, x_0),\tag{7.27}$$

причем для отклонений функций $x_m(t, x_0)$ и $\dot{x}_m(t, x_0)$ от $x_\infty(t, x_0)$ и $\dot{x}_\infty(t, x_0)$ с учетом (7.25), (7.26) получаем

$$|x_\infty(t, x_0)-x_m(t, x_0)|_0\leqslant Q^m(1-Q)^{-1}(M\omega^2/4);\tag{7.28}$$

$$|\dot{x}_\infty(t, x_0)-\dot{x}_m(t, x_0)|_0\leqslant Q^m(1-Q)^{-1}(5M\omega/6).\tag{7.29}$$

Переходя в соотношении (7.11) к пределу при $m\to\infty$, убеждаемся, что $x_\infty(t, x_0)$ является периодическим решением уравнения (7.13). Методом от противного легко доказать единственность функции $x_\infty(t, x_0)$.

Выясним теперь связь между предельной функцией $x_\infty(t, x_0)$ и периодическим решением $\varphi(t)$ уравнения (7.1).

Теорема 1.8 [44]. *Пусть правая часть уравнения (7.1) удовлетворяет условиям теоремы 1.7 и уравнение (7.1) имеет периодическое с периодом ω решение $x=\varphi(t)$, проходящее при $t=0$ через точку $\varphi(0)=x_0$ отрезка $a+M\omega^2/4\leqslant x_0\leqslant b-M\omega^2/4$. Тогда*

$$\varphi(t)=x_\infty(t, x_0)=\lim_{m\to\infty}x_m(t, x_0).\tag{7.30}$$

Доказательство. Поскольку $\varphi(t)$ — периодическое решение уравнения (7.1), то выполняются условия

$$\begin{gathered}\overline{f(t, \varphi(t), \varphi(t-\Delta), \dot{\varphi}(t), \dot{\varphi}(t-\Delta))} = 0,\\ \dot{\varphi}(0) = -\overline{\int_0^t f(t, \varphi(t), \varphi(t-\Delta), \dot{\varphi}(t), \dot{\varphi}(t-\Delta))\, dt}.\end{gathered} \qquad (7.31)$$

Следовательно, функция $\varphi(t)$, являясь решением уравнения (7.1), будет в силу соотношений (7.31) также решением уравнения

$$\begin{aligned}\varphi(t) = x_0 + \int_0^t \Bigg\{ \int_0^t [f(t, \varphi(t), \varphi(t-\Delta), \dot{\varphi}(t), \dot{\varphi}(t-\Delta)) -\\ - \overline{f(t, \varphi(t), \varphi(t-\Delta), \dot{\varphi}(t), \dot{\varphi}(t-\Delta))}]\, dt -\\ - \overline{\int_0^t [f(t, \varphi(t), \varphi(t-\Delta), \dot{\varphi}(t), \dot{\varphi}(t-\Delta)) - \overline{f(t, \varphi(t), \varphi(t-\Delta),}}\\ \overline{\overline{\dot{\varphi}(t)\, \dot{\varphi}(t-\Delta))}]dt} \Bigg\} dt = x_0 + L^2 f(t, \varphi(t), \varphi(t-\Delta), \dot{\varphi}(t), \dot{\varphi}(t-\Delta)).\end{aligned}$$

Значит, функция $\varphi(t)$, как и $x_\infty(t, x_0)$, является периодическим решением уравнения (7.13) и соотношение (7.30) следует из единственности этого решения.

Теоремы 1.7 и 1.8 утверждают, таким образом, что всякое периодическое с периодом ω решение уравнения (7.1), удовлетворяющее условиям (7.3), (7.4) и неравенствам (7.5), (7.6) и проходящее при $t=0$ через точку $a+M\omega^2/4=x_0\leqslant b-M\omega^2/4$, можно найти как предел последовательности периодических функций (7.11); при этом разность между точным периодическим решением $\varphi(t)$ и его приближением $x_m(t, x_0)$ оценивается с помощью неравенств (7.28), (7.29).

Рассмотрим вопрос существования периодических решений уравнения (7.1). Обозначим

$$T(x_0) = \overline{f(t, x_\infty(t, x_0), x_\infty(t-\Delta, x_0), \dot{x}_\infty(t, x_0), \dot{x}_\infty(t-\Delta, x_0))}, \qquad (7.32)$$

где $x_\infty(t, x_0)$ — предел последовательности периодических функций (7.11).

Так как при $T(x_0)=0$ уравнение (7.13) переходит в уравнение (7.1), то вопрос существования периодических решений уравнения (7.1) сводится к вопросу существования нулей функции $T(x_0)$. Каждому нулю функции $T(x_0)$ соответствует единственное периодическое с периодом ω решение уравнения (7.1) и число периодических решений уравнения (7.1) определяется числом нулей

функции $T(x_0)$. В связи с тем, что функцию $\Delta(x_0)$ можно найти лишь приближенно, исходя из последовательности функций (7.11) определяем

$$T^m(x_0) = f(t, x_m(t, x_0), x_m(t-\Delta, x_0), \dot{x}_m(t, x_0), \dot{x}_m(t-\Delta, x_0)). \quad (7.33)$$

Каждая из функций последовательности (7.11) определена и непрерывна по $x_0 \in [a+M\omega^2/4, b-M\omega^2/4]$. Кроме того, из неравенств (7.28), (7.29) следует оценка

$$|T(x_0) - T^m(x_0)| \leqslant d_m, \quad (7.34)$$

где $d_m = MQ^{m+1}(1-Q)^{-1}$. Учитывая непрерывность функций $T^m(x_0)$ и оценку (7.34), легко доказать утверждение, аналогичное теореме 1.4 [44].

Теорема 1.9. *Пусть правая часть уравнения (7.1) удовлетворяет условиям теоремы 1.7 и для некоторого m функция $T^m(x_0)$ удовлетворяет неравенствам*

$$\min_{a+\frac{M\omega^2}{4}\leqslant x\leqslant b-\frac{M\omega^2}{4}} T^m(x) \leqslant -d_m, \qquad \max_{a+\frac{M\omega^2}{4}\leqslant x\leqslant b-\frac{M\omega^2}{4}} T^m(x) \geqslant d_m. \quad (7.35)$$

Тогда уравнение (7.1) имеет периодическое с периодом ω решение $x=x(t)$, для которого

$$a + M\omega^2/4 \leqslant x(0) \leqslant b - M\omega^2/4.$$

В частности, если правая часть уравнения (7.1) является полиномом относительно x, x_Δ, y, y_Δ, то, учитывая, что $T(x_0)$ является скалярной функцией одного аргумента, с помощью теоремы о нулях аналитической функции можно доказать следующее утверждение [44].

Теорема 1.10. *Пусть правая часть уравнения (7.1) является полиномом относительно x, x_Δ, y, y_Δ и удовлетворяет условиям теоремы 1.7. Тогда если уравнение (7.1) имеет периодическое с периодом ω решение, то оно имеет по одному периодическому решению либо для каждого значения $x(0)=x_0$ отрезка $[a+M\omega^2/4, b-M\omega^2/4]$, либо лишь для конечного числа таких значений.*

Действительно, так как функция $T(x_0)$ является пределом равномерно сходящейся в некоторой полосе комплексной области, содержащей отрезок $[a+M\omega^2/4, b-M\omega^2/4]$, последовательности полиномов, то она — аналитическая. Поэтому на этом отрезке она либо тождественно равна нулю, либо имеет конечное число нулей. В первом случае начальные значения $x(0)=x_0$, $dx(t)/dt|_{t=0}=y_0$ периодических решений заполняют некоторую прямую прямоугольника

$$D = [a + M\omega^2/4, b - M\omega^2/4] \times [c + 5M\omega/6, d - 5M\omega/6],$$

во втором — являются изолированными точками этого прямоугольника.

Как указывалось выше, нахождение начальных значений периодических решений x_0 равносильно отысканию нулей функции $T(x_0)$. Из неравенства (7.34) следует, что для всякого нуля x^0 функции $T(x_0)$ выполняется неравенство

$$|T^m(x^0)| \leqslant d_m, \qquad m = 0, 1, \ldots \tag{7.36}$$

Таким образом, все нули функции $T(x_0)$ содержатся среди решений неравенства (7.36). Если обозначить через $\mathfrak{M}_m$ множество точек отрезка $a + M\omega^2/4 \leqslant x_0 \leqslant b - M\omega^2/4$, удовлетворяющих неравенству (7.36), то любая точка этого множества может быть нулем функции $T(x_0)$. Но $\mathfrak{M}_m$ при $m \to \infty$ стремится к множеству $\mathfrak{M}$ нулей функции $T(x_0)$, поэтому любую точку из $\mathfrak{M}_m$ можно принять за m-е приближение к начальному значению периодического решения. Следовательно, отыскание начальных значений периодических решений уравнения (7.1) сводится к отысканию нулей функции $T^m(x_0)$ или, если таковых нет, к отысканию точек, удовлетворяющих неравенству (7.36).

В некоторых случаях начальные значения периодических решений уравнения (7.1) можно найти точно. Это можно сделать, например, когда правая часть уравнения (7.1) такова, что $T^m(x) = 0$ для всех $m = 0, 1, \ldots$ и некоторого фиксированного $x = x_0$.

Один вид уравнений, для которых $T^m(x) = 0$ $(m = 0, 1, \ldots)$, устанавливает следующее утверждение [44].

Теорема 1.11. *Пусть правая часть уравнения*

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = f\left(t, x(t), x\left(t - \frac{\omega}{2}\right), \dot{x}(t), \dot{x}\left(t - \frac{\omega}{2}\right)\right) \tag{7.37}$$

в области (7.2) *удовлетворяет условиям теоремы 1.7 и условию*

$$f(-t, x, x_\Delta, y, y_\Delta) = -f(t, x, x_\Delta, y, y_\Delta). \tag{7.38}$$

Тогда уравнение (7.37) *имеет периодическое с периодом* ω *решение, определяемое соотношением* $x(t, 0) = x_\infty(t, 0)$.

Доказательство теоремы 1.11 аналогично доказательству теоремы 1.5.

§ 8. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СЧЕТНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Поскольку при исследовании периодических решений нелинейных систем с запаздыванием численно-аналитическим методом размерность системы не играет никакой роли, то этот метод сравнительно легко можно распространить на бесконечные системы дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ — точка пространства m ограниченных числовых последовательностей с нормой $|x| = \sup|x_n|$. Рассмотрим счетную систему дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t - \Delta)), \tag{8.1}$$

где $f(t, x, y) = (f_1(t, x, y), f_2(t, x, y), \ldots, f_n(t, x, y), \ldots)$ — непрерывная функция переменных t, x, y из области

$$-\infty < t < \infty, \quad x \in D, \quad y \in D \tag{8.2}$$

(D — ограниченная замкнутая область пространства $\mathfrak{m}$). Пусть $f(t, x, y)$ — периодическая по t функция с периодом ω, удовлетворяющая неравенствам

$$|f(t, x, y)| \leqslant \mathbf{M}; \tag{8.3}$$

$$|f(t, x', y') - f(t, x'', y'')| \leqslant K_1 |x' - x''| + K_2 |y' - y''|, \tag{8.4}$$

где $\mathbf{M} = (M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots)$, $K_1 = \{k'_{ij}\}$, $K_2 = \{k''_{ij}\}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ — соответственно бесконечномерный вектор и матрицы с неотрицательными элементами.

Под решением системы уравнений (8.1) будем понимать функцию $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), \ldots)$, определенную для всех t из интервала (a, b), принимающую значения в пространстве $\mathfrak{m}$, непрерывно дифференцируемую и удовлетворяющую уравнению (8.1).

Как известно [33], матрица $K = \{k_{ij}\}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ порождает оператор $\mathbf{K}$, действующий в пространстве $\mathfrak{m}$, когда

$$\sup_i \sum_{i=1}^{\infty} k_{ij} < \infty,$$

причем норма оператора $\mathbf{K}$ определяется следующим образом:

$$\|\mathbf{K}\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij}.$$

Оператор $\mathbf{K}$ будем называть вполне регулярным, если $\|\mathbf{K}\| \leqslant q < 1$. Предположим, что правая часть системы (8.1) удовлетворяет следующим условиям:

1) область $D - \mathbf{M}\omega/2$ не пуста;

2) оператор $\mathbf{Q} = (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)(\omega/3 + 3/2\Delta(1 - \Delta/\omega)^2)$ вполне регулярен.

Для системы уравнений (8.1) имеют место теоремы, аналогичные теоремам 1.1 и 1.5. Прежде чем решать вопрос о существовании периодических периода ω решений системы (8.1), докажем одно вспомогательное утверждение [122].

Лемма 1.4. *Пусть D — замкнутая ограниченная область пространства $\mathfrak{m}$, A_0 и A — непрерывные отображения D в $\mathfrak{m}$, причем $\|Ax - A_0x\| \leqslant \varepsilon$. Тогда если A_0 — топологическое отображение, то AD содержит множество $A_0D \setminus \Pi(\varepsilon)$, состоящее из точек области A_0D, входящих в A_0D вместе со своей ε-окрестностью.*

Доказательство. Так как A_0 — топологическое отображение, то на A_0D определено непрерывное отображение AA_0^{-1}, отображающее A_0D на AD. Положив $A_0D = D_1$, $AA_0^{-1} = A_1$, сведем доказательство леммы к доказательству ее для случая, когда

$A_0 = I$, где I — тождественное отображение. Докажем, что $D \setminus \Pi(\varepsilon) \subset AD$. Выберем $x_0 \in D \setminus \Pi(\varepsilon)$, тогда шар $T_\varepsilon(x_0): |x - x_0| \leqslant \varepsilon$ принадлежит $D: T_\varepsilon(x_0) \subset D$. Определим на $T_\varepsilon(x_0)$ непрерывный оператор

$$A^* x = x_0 + (x - Ax). \tag{8.5}$$

Будем рассматривать его в качестве преобразования в некотором пространстве C^∞, определив последнее [1] как пространство числовых последовательностей $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$, равномерно ограниченных числом ε, $|x_i| \leqslant \varepsilon$, и имеющих норму

$$\| x \| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} | x_k |. \tag{8.6}$$

При $x_0 = 0$ шар $T_\varepsilon(x_0)$ совпадает с пространством C^∞ и оператор A^* переводит C^∞ в себя:

$$\| A^* x - x_0 \| = \| x - Ax \| < \varepsilon,$$

при этом семейство k-х координат $\{A^* x\}_k$ преобразования A^* компактно для любого $k = 1, 2, \dots$. Отсюда с учетом теоремы о компактности множества в пространстве C^∞ [1] следует компактность множества точек $\{A^* x\}_k$ как множества точек пространства C^∞.

По теореме Шаудера [1] можно заключить, что оператор A^* имеет в C^∞ неподвижную точку

$$A^* x^* = x^*. \tag{8.7}$$

Из формул (8.5) и (8.7) следует, что

$$A x^* = x_0. \tag{8.8}$$

Равенство (8.8) означает, что x_0 — образ точки x^* при отображении A. Так как равенство выполняется для любой точки $x_0 \in D \setminus \Pi(\varepsilon)$, а $x^* \in T_\varepsilon(x_0)$ и, значит, $x^* \in D$, то оно обозначает также, что все множество $D \setminus \Pi(\varepsilon)$ есть образ множества D при отображении A. Следовательно, $D \setminus \Pi(\varepsilon) \subset AD$, что и требовалось доказать. Случай $x_0 \neq 0$ сводится к рассмотренному сдвигом системы координат.

Вопрос существования периодических решений счетной системы дифференциальных уравнений (8.1) решает следующее утверждение [43].

Теорема 1.12. *Пусть система (8.1), заданная в области D пространства* m, *удовлетворяет неравенствам (8.3), (8.4), условиям 1, 2 (см. с. 39) и следующим условиям:*

а) для некоторого целого m отображение

$$T^m : T^m = T^m(x_0) = \overline{f(t, x_m(t, x_0), x_m(t - \Delta, x_0))} \tag{8.9}$$

области $D - M\omega/2$ в область $T^m(D - M\omega/2)$ имеет слабую точку $x_0 = x^0$:

$$T^m(x^0) = 0; \tag{8.10}$$

б) существует замкнутая ограниченная область D_1, принадлежащая D—$\mathbf{M}\omega/2$, содержащая точку x^0 и такая, что оператор T^m топологически отображает D_1 на T^mD_1;

в) на границе Γ_{D_1} области D_1 выполняется неравенство

$$\inf_{x\in\Gamma_{D_1}} \|T^m(x)\| \geqslant \frac{q^m}{1-q} (\|\mathbf{K}_1\| + \|\mathbf{K}_2\|) \frac{\|\mathbf{M}\|\omega}{3}. \qquad (8.11)$$

***Тогда система** (8.1) имеет периодическое с периодом ω решение $x=x(t)$, для которого $x(0)\in D_1$.*

Доказательство. Учитывая оценку (3.9), которая в данном случае принимает вид

$$\|T^m(x_0) - T(x_0)\| \leqslant \frac{q^m}{1-q} (\|\mathbf{K}_1\| + \|\mathbf{K}_2\|) \frac{\|\mathbf{M}\|\omega}{3}, \qquad (8.12)$$

и лемму 1.4, замечаем, что множество $T^mD_1\diagdown\Pi\left(\frac{q^m}{1-q}(\|\mathbf{K}_1\| + \|\mathbf{K}_2\|)\frac{\|\mathbf{M}\|\omega}{3}\right)$ содержится в TD_1. Если данное множество содержит начало координат системы координат $T=(T_1, T_2, \dots, T_n, \dots)$, то и множество TD_1 содержит это начало координат. Последнего достаточно, чтобы система (8.1) имела периодическое с периодом ω решение.

Для завершения доказательства теоремы 1.12 достаточно доказать соотношение

$$0\in T^mD_1\diagdown\Pi\left(\frac{q^m}{1-q}(\|\mathbf{K}_1\| + \|\mathbf{K}_2\|)\frac{\|\mathbf{M}\|\omega}{3}\right).$$

Так как отображение $T^m(x)$ — топологическое, то T^mD_1 —область [1] и граница $\Gamma_{T^mD_1}$ области T^mD_1 есть образ границы Γ_{D_1} области D_1:

$$\Gamma_{T^mD_1} = T^m\Gamma_{D_1}. \qquad (8.13)$$

В силу условия «а» теоремы множество T^mD_1 содержит нулевую точку системы $T=(T_1, T_2, \dots, T_n, \dots)$. Эта точка принадлежит множеству $TD_1\diagdown\Pi(r)$, когда все точки z границы $\Gamma_{T^mD_1}$ множества T^mD_1 находятся от нее на расстоянии, не меньшем r. Из этого следует, что нуль принадлежит множеству

$$T^mD_1\diagdown\Pi\left(\frac{q^m}{1-q}(\|\mathbf{K}_1\| + \|\mathbf{K}_2\|)\frac{\|\mathbf{M}\|\omega}{3}\right)$$

при

$$\inf_{z\in\Gamma_{T^mD_1}} \|z\| \geqslant \frac{q^m}{1-q} (\|\mathbf{K}_1\| + \|\mathbf{K}_2\|) \frac{\|\mathbf{M}\|\omega}{3}. \qquad (8.14)$$

В силу неравенства (8.13) справедливо соотношение

$$z = T^m(x)\Big|_{x\in\Gamma_{D_1}}. \qquad (8.15)$$

с учетом которого неравенство (8.14) принимает вид

$$\inf_{x\in\Gamma_{D_1}} |T^m(x)| \geqslant \frac{q^m}{1-q}(|K_1|+|K_2|)\frac{|M|\omega}{3}. \tag{8.16}$$

Из сказанного следует, что при выполнении неравенства (8.16) система (8.1) имеет периодическое с периодом ω решение, что и требовалось доказать.

§ 9. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t), x(t-\Delta), \frac{dx(t-\Delta)}{dt}\right), \tag{9.1}$$

где вектор-функция $f(t, x, y, z)$ — периодическая по t с периодом ω, определенная для всех

$$-\infty < t < \infty,\ x \in D,\ y = x(t-\Delta) \in D,\ z = dx(t-\Delta)/dt \in D_1 \tag{9.2}$$

(D — ограниченная замкнутая область пространства E_n, $D_1 = \{z: |z| \leqslant 2\mathbf{M}\}$).

Предположим, что вектор-функция $f(t, x, y, z)$ непрерывна по совокупности переменных t, x, y, z, принадлежащих области (9.2), и удовлетворяет неравенствам

$$|f(t, x, y, z)| \leqslant \mathbf{M}; \tag{9.3}$$

$$|f(t, x_1, y_1, z_1) - f(t, x_2, y_2, z_2)| \leqslant K_1|x_1 - x_2| + K_2|y_1 - y_2| + K_3|z_1 - z_2|, \tag{9.4}$$

где $\mathbf{M}$, K_1, K_2, K_3 — соответственно n-мерный вектор и $(n\times n)$-мерные матрицы с неотрицательными элементами. Область D, матрицы K_1, K_2, K_3, отклонение Δ и период ω таковы, что выполняются следующие условия:

1) множество $D - \mathbf{M}\omega/2$ не пусто;

2) наибольшее собственное значение $\lambda_{\max}$ матрицы

$$Q = (K_1 + K_2)\frac{\omega}{2} + 2K_3$$

не превышает единицы.

Предположим, что система (9.1) имеет периодическое с периодом ω решение и известна точка $x_0 \in D - \mathbf{M}\omega/2$, через которую это решение проходит в момент времени $t = t_0 = 0$. Тогда алгоритм отыскания этого решения устанавливает [131].

Теорема 1.13. *Пусть $x = \varphi(t)$ — периодическое по t с периодом ω решение системы (9.1), удовлетворяющее условиям (9.3), (9.4) и 1, 2 (см. выше). Тогда*

$$\varphi(t) = \lim_{m\to\infty} x_m(t, x_0) \tag{9.5}$$

равномерно относительно $-\infty < t < \infty$, $x_0 \in D - \mathbf{M}\omega/2$ *и*

$$|\varphi(t) - x_m(t, x_0)| \leqslant Q^m (E - Q)^{-1} (\mathbf{M}\omega/2) \tag{9.6}$$

для всех $m=0, 1, 2, \dots$, *где* $x_m(t, x_0)$ $(x_0(t, x_0) = x_0)$ *являются периодическими с периодом* ω *функциями, определяемыми соотношениями*

$$x_{m+1}(t, x_0) = x_0 + \int_0^t [f(t, x_m(t, x_0), x_m(t-\Delta, x_0), \dot{x}_m(t-\Delta, x_0)) - \overline{f(t, x_m(t, x_0), x_m(t-\Delta, x_0), \dot{x}_m(t-\Delta, x_0))}]\,dt. \tag{9.7}$$

Доказательство. Очевидно, что функции последовательности (9.7) являются периодическими с периодом ω. Кроме того, согласно лемме 1.1

$$|x_m(t, x_0) - x_0| \leqslant \mathbf{M}\alpha_1(t) \leqslant \mathbf{M}\omega/2. \tag{9.8}$$

Дифференцируя (9.7), получаем оценку

$$|\dot{x}_m(t, x_0)| \leqslant |f(t, x_{m-1}(t, x_0), x_{m-1}(t-\Delta, x_0), \dot{x}_{m-1}(t-\Delta, x_0))| + |\overline{f(t, x_{m-1}(t, x_0), x_{m-1}(t-\Delta, x_0), \dot{x}_{m-1}(t-\Delta, x_0)}| \leqslant 2\mathbf{M}. \tag{9.9}$$

Из периодичности функций $x_m(t, x_0)$ и $\dot{x}_m(t, x_0)$ следует, что для любого m $x_m(t, x_0)$ принадлежат области (9.2).

Докажем сходимость последовательностей $\{x_m(t, x_0)\}$ и $\{\dot{x}_m(t, x_0)\}$.

Для этого оценим разности $x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)$ и $\dot{x}_{m+1}(t, x_0) - \dot{x}_m(t, x)$. Запишем разность $x_2(t, x_0) - x_1(t, x_0)$ в виде

$$|x_2(t, x_0) - x_1(t, x_0)| \leqslant \left(1 - \frac{t}{\omega}\right)\int_0^t [K_1|x_1(t, x_0) - x_0| + K_2|x_1(t-\Delta, x_0) - x_0| + K_3|\dot{x}_1(t-\Delta, x_0)|]\,dt + \frac{t}{\omega}\int_t^\omega [K_1|x_1(t, x_0) - x_0| + K_2|x_1(t-\Delta, x_0) - x_0| + K_3|\dot{x}_1(t-\Delta, x_0)|]\,dt. \tag{9.10}$$

С учетом оценок (9.8), (9.9) неравенство (9.10) можно представить как

$$|x_2(t, x_0) - x_1(t, x_0)| \leqslant \alpha_1(t) Q\mathbf{M} \leqslant Q(\mathbf{M}\omega/2). \tag{9.11}$$

Дифференцируя (9.7), легко получить оценку

$$|\dot{x}_2(t, x_0) - \dot{x}_1(t, x_0)| \leqslant 2|f(t, x_1(t, x_0), x_1(t-\Delta, x_0), \dot{x}_1(t-\Delta, x_0) - f(t, x_0, x_0)| \leqslant 2\left[(K_1 + K_2)\frac{\omega}{2} + 2K_3\right]\mathbf{M} \leqslant 2Q\mathbf{M}.$$

Методом полной математической индукции легко доказать, что для всех $m \geqslant 1$ выполняются оценки

$$|x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \leqslant Q^m (\mathbf{M}\omega/2),$$
$$|\dot{x}_{m+1}(t, x_0) - \dot{x}_m(t, x_0)| \leqslant 2Q^m \mathbf{M}. \qquad (9.12)$$

Из этих неравенств с учетом условий, налагаемых на матрицу Q, следует равномерная относительно t и x_0 сходимость последовательности функций (9.7). Переходя в (9.7) к пределу при $m \to \infty$, убеждаемся, что предельная функция $x_\infty(t, x_0)$ является периодическим решением уравнения

$$x_\infty(t, x_0) = x_0 + \int_0^t [f(t, x_\infty(t, x_0), x_\infty(t-\Delta, x_0), \dot{x}_\infty(t-\Delta, x_0)) - \overline{f(t, x_\infty(t, x_0), x_\infty(t-\Delta, x_0), \dot{x}_\infty(t-\Delta, x_0))}]\, dt. \qquad (9.13)$$

Из единственности этого решения, что легко доказать методом от противного, следует соотношение (9.5).

Теорема существования периодического решения системы (9.1) формулируется и доказывается аналогично теореме 1.2.

§ 10. ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x, \int_t^{t+T} \varphi(t, s, x(s))\, ds\right), \qquad (10.1)$$

где функции $f(t, x, y)$, $\varphi(t, s, x)$ являются периодическими по t с периодом ω, определенными и непрерывными в области

$$-\infty < t, \quad s < \infty, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D, \quad y = (y_1, \ldots, y_n) \in D_1$$

(D, D_1 — ограниченные области евклидова пространства E_n, T — фиксированное число).

Предположим, что функции $f(t, x, y)$, $\varphi(t, s, x)$ удовлетворяют неравенствам

$$|f(t, x, y)| \leqslant \mathbf{M}, \quad |\varphi(t, s, x)| \leqslant \mathbf{N},$$
$$|f(t, x', y') - f(t, x'', y'')| \leqslant K_1 |x' - x''| + K_2 |y' - y''|, \qquad (10.2)$$
$$|\varphi(t, s, x') - \varphi(t, s, x'')| \leqslant K_3 |x' - x''|,$$

где $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ — n-мерные векторы с неотрицательными координатами, K_1, K_2, K_3 — $(n \times n)$-мерные матрицы с неотрицательными элементами. В дальнейшем будем рассматривать лишь такие системы вида (10.1), для которых выполняются условия:

1) множество $D—\mathbf{M}\omega/2$ не пусто;

2) наибольшее число матрицы $Q = \frac{\omega}{3}\left[K_1 + \frac{3T}{2} K_2K_3\right]$ меньше единицы.

Справедливо следующее утверждение, аналогичное теореме 1.1 [94].

Теорема 1.14. *Пусть система интегро-дифференциальных уравнений удовлетворяет неравенствам (10.2) и выполняются условия 1, 2 (см. выше). Тогда если система (10.1) имеет периодическое с периодом* ω *решение* $x=x(t)$, *принимающее при* $t=0$ *значение* $x_0 \in D—\mathbf{M}\omega/2$, *то*

$$x(t) = x_\infty(t, x_0), \tag{10.3}$$

где $x_m(t, x_0)$ — *последовательность периодических с периодом* ω *функций, определяемых соотношением*

$$x_m(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \left[f\left(t, x_{m-1}(t, x_0), \int_t^{t+T} \varphi(t, s, x_{m-1}(s, x_0))\, ds\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega f\left(t, x_{m-1}(t, x_0), \int_t^{t+T} \varphi(t, s, x_{m-1}(s, x_0))\, ds\right) dt \right] dt, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{10.4}$$

и $x_\infty(t, x_0)$ — *предельная функция этой последовательности.*

Доказательство. Вполне очевидно, что каждая из функций последовательности (10.4) — периодическая по t с периодом ω. Кроме того, в силу леммы 1.1 для всех $x_0 \in D$ и $0 \leqslant t \leqslant \omega$ имеет место оценка

$$|x_1(t, x_0) - x_0| \leqslant \left(1 - \frac{t}{\omega}\right)\int_0^t \left| f\left(t, x_0, \int_t^{t+T} \varphi(t, s, x_0)\, ds\right)\right| dt +$$

$$+ \frac{t}{\omega}\int_t^\omega \left| f\left(t, x_0, \int_t^{t+T} \varphi(t, s, x_0)\, ds\right)\right| dt \leqslant 2t\left(1 - \frac{t}{\omega}\right) M. \tag{10.5}$$

Обозначим

$$\alpha_1(t) = \begin{cases} 2t\left(1 - \frac{t}{\omega}\right) & \text{для } t \in [0, \omega], \\ \alpha_1(t - k\omega) & \text{для } t \in [k\omega, (k+1)\omega] \end{cases} \tag{10.6}$$

$$(k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots).$$

С учетом функции (10.6) неравенство (10.5) можно записать в виде

$$|x_1(t, x_0) - x_0| \leqslant \alpha_1(t)\mathbf{M} \leqslant \mathbf{M}\omega/2, \tag{10.7}$$

откуда следует, что $x_1(t, x_0) \in D$, если $x_0 \in D—\mathbf{M}\omega/2$. Если предположить, что $x_{m-1}(t, x_0) \in D$, то из равенства (10.4) аналогично предыдущему получаем неравенство

$$|x_m(t, x_0) - x_0| \leqslant \mathbf{M}\omega/2,$$

из которого следует, что $x_m(t, x_0) \in D$, если $x_0 \in D — \mathbf{M}\omega/2$.

Используя метод полной математической индукции, можно сделать вывод, что для всех $m \geqslant 0$, любых $t \in (-\infty, \infty)$ и $x_0 \in D - M\omega/2$ функции $x_m(t, x_0)$ последовательности (10.4) существуют, являются периодическими по t с периодом ω и принадлежат области D.

Для доказательства сходимости последовательности (10.4) оценим разность $x_2(t, x_0) - x_1(t_1 x_0)$:

$$x_2(t, x_0) - x_1(t, x_0) = \left(1 - \frac{t}{\omega}\right) \int_0^t \left[f\left(t, x_1(t, x_0), \int_t^{t+T} \varphi(t, s, x_1(s, x_0)) ds\right) - f\left(t, x_0, \int_t^{t+T} \varphi(t, s, x_0)\, ds\right)\right] dt - \frac{1}{\omega} \int_t^{\omega} \left[f\left(t, x_1(t, x_0), \int_t^{t+T} \varphi(t, s, x_1(s, x_0)) ds - f\left(t, x_0, \int_t^{t+T} \varphi(t, s, x_0)\right) ds\right] dt, \qquad (10.8)$$

откуда

$$|x_2(t, x_0) - x_1(t, x_0)| \leqslant \left(1 - \frac{t}{\omega}\right) \int_0^t \left[K_1 |x_1(t, x_0) - x_0| + K_2K_3 \int_t^{t+T} |x_1(s, x_0) - x_0|\, ds\right] dt + \frac{t}{\omega} \int_t^{\omega} \left[K_1 |x_1(t, x_0) - x_0| + K_2K_3 \int_t^{t+T} |x_1(s, x_0) - x_0|\, ds\right] dt. \qquad (10.9)$$

С учетом оценки (10.7) из неравенства (10.9) находим

$$|x_2(t, x_0) - x_1(t, x_0)| \leqslant \left[\left(1 - \frac{t}{\omega}\right) \int_0^t \alpha_1(t)\, dt + \frac{t}{\omega} \int_t^{\omega} \alpha_1(t)\, dt\right] K_1 \mathbf{M} + \left[\left(1 - \frac{t}{\omega}\right) \int_0^t dt + \frac{t}{\omega} \int_t^{\omega} dt\right] \frac{T\omega}{2} K_2K_3\mathbf{M} = \alpha_2(t) K_1 M + \alpha_1(t) \frac{T\omega}{2} K_2K_3\mathbf{M}, \qquad (10.10)$$

где

$$\alpha_2(t) = \left(1 - \frac{t}{\omega}\right) \int_0^t \alpha_1(t)\, dt + \frac{t}{\omega} \int_t^{\omega} \alpha_1(t)\, dt = \alpha_1(t) \left[\frac{\omega}{6} + \frac{\alpha_1(t)}{3}\right] \leqslant \frac{\omega}{3} \alpha_1(t).$$

Неравенство (10.10) можно записать в виде

$$|x_2(t, x_0) - x_1(t, x_0)| \leqslant \alpha_1(t) R\mathbf{M}, \qquad (10.11)$$

где

$$R = \frac{\omega}{3} \left(K_1 + \frac{3T}{2} K_2K_3\right), \quad \Delta \leqslant t \leqslant \omega.$$

Предположим, что разность $x_m(t, x_0) - x_{m-1}(t, x_0)$ удовлетворяет неравенству

$$|x_m(t, x_0) - x_{m-1}(t, x_0)| \leqslant \alpha_1(t) R^{m-1}\mathbf{M}, \qquad (10.12)$$

и покажем, что $x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)$ удовлетворяет неравенству

$$|x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \leqslant \alpha_1(t) R^m\mathbf{M}. \qquad (10.13)$$

Представим разность $x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)$ в виде

$$x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0) = \left(1 - \frac{t}{\omega}\right)\int_0^t \left[f\left(t, x_m(t, x_0), \int_t^{t+T} \varphi(t, s, x_m(s, x_0))\, ds\right) - f\left(t, x_{m-1}(t, x_0), \int_t^{t+T} \varphi(t, s, x_{m-1}(s, x_0))\, ds\right)\right] dt -$$

$$- \frac{t}{\omega}\int_t^{\omega}\left[f\left(t, x_m(t, x_0), \int_t^{t+T} \varphi(t, s, x_m(s, x_0))\, ds\right) - f\left(t, x_{m-1}(t, x_0), \int_t^{t+T} \varphi(t, s, x_{m-1}(s, x_0))\, ds\right)\right] dt, \qquad (10.14)$$

откуда с учетом неравенства (10.13) следует

$$|x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \leqslant \left(1 - \frac{t}{\omega}\right)\int_0^t \Bigg| K_1 |x_m(t, x_0) - x_{m-1}(t, x_0)| + K_2K_3 \int_t^{t+T} |x_m(s, x_0) - x_{m-1}(s, x_0)|\, ds\Bigg] dt + \frac{t}{\omega}\int_t^{\omega}\Bigg[K_1 |x_m(t, x_0) - x_{m-1}(t, x_0)| + K_2K_3 \int_t^{t+T} |x_m(s, x_0) - x_{m-1}(s, x_0)|\, ds\Bigg] dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 - \frac{t}{\omega}\right)\int_0^t\left[K_1\alpha_1(t) R^{m-1}\mathbf{M} + K_2K_3\int_t^{t+T}\frac{\omega R^{m-1}}{2}\mathbf{M}ds\right]dt + \frac{t}{\omega}\int_t^{\omega}\left[K_1\alpha_1(t) R^{m-1}\mathbf{M} + K_2K_3\int_t^{t+T}\frac{\omega R^{m-1}}{2}\mathbf{M}ds\right]dt = \alpha_2(t) K_1R^{m-1}\mathbf{M} +$$

$$+ \alpha_1(t)\frac{\omega T}{2}K_2K_3R^{m-1}\mathbf{M} \leqslant \alpha_1(t)\frac{\omega}{3}\left[K_1 + \frac{3T}{2}K_2K_3\right]R^{m-1}\mathbf{M},$$

т. е. получаем неравенство (10.13).

По индукции можно заключить, что для всех $-\infty \leqslant t \leqslant \infty$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ справедлива оценка

$$|x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \leqslant R^m\mathbf{M}\omega/2, \qquad (10.15)$$

поскольку $\alpha_1(t) \leqslant \omega/2$ и $x_m(t, x_0)$ — периодическая по t функция с периодом ω. Из неравенства (10.15) следует оценка

$$|x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \leqslant \frac{\omega}{2} \sum_{i=0}^{k-1} R^{m+i} \mathbf{M}. \qquad (10.16)$$

Поскольку собственные числа матрицы $R = \frac{\omega}{3}\left(K_1 + \frac{3T}{2} K_2 K_3\right)$ находятся по предположению в круге единичного радиуса, то

$$R^m \to 0 \text{ при } m \to \infty; \qquad (10.17)$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} R^{m+i} \leqslant R^m (E - R)^{-1}. \qquad (10.18)$$

Из соотношений (10.17), (10.18) следует равномерная относительно $(t, x_0) \in (-\infty, \infty) \times D - \mathbf{M}\omega/2$ сходимость последовательности (10.13).

Обозначая предельную функцию последовательности (10.4) через $x_\infty(t, x_0)$ и переходя в (10.4) к пределу при $m \to \infty$, убеждаемся, что предельная функция $x_\infty(t, x_0)$ является решением уравнения

$$x(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \left[f\left(t, x(t, x_0), \int_t^{t+T} \varphi(t, s, x(s, x_0))\, ds\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\omega} \int_0^\omega f\left(t, x(t, x_0), \int_t^{t+T} \varphi(t, s, x(s, x_0))\, ds\right) dt \right] dt, \qquad (10.19)$$

и для разности $x_\infty(t, x_0) - x_m(t, x_0)$ верна оценка

$$|x_\infty(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \leqslant R^m (E - R)^{-1} \mathbf{M}\omega/2. \qquad (10.20)$$

Так как $x(t)$ — решение уравнения (10.1), то выполняется равенство

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f\left(t, x(t), \int_t^{t+T} \varphi(t, s, x(s))\, ds\right) dt, \qquad (10.21)$$

и, в силу того что это решение периодическое, интегральное среднее по времени равно нулю:

$$\overline{f\left(t, x(t), \int_I^{t+T} \varphi(t, s, x(s))\, ds\right)} = 0. \qquad (10.22)$$

Из уравнений (10.21) и (10.22) следует, что $x(t)$ и $x_\infty(t, x_0)$ — решения одного и того же уравнения (10.19). Поэтому для доказательства равенства $x(t) = x_\infty(t, x_0)$ достаточно доказать, что уравнение (10.19) не имеет двух различных периодических решений. Это легко доказать, как и раньше, методом от противного.

Введя обозначения

$$S(x_0)=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} f\left(t,\ x_\infty(t,\ x_0),\ \int_t^{t+T}\varphi(t,\ s,\ x_\infty(s,\ x_0))\,ds\right)dt; \qquad (10.23)$$

$$S_m(x_0)=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} f\left(t,\ x_m(t,\ x_0),\ \int_t^{t+T}\varphi(t,\ s,\ x_m(s,\ x_0))\,ds\right)dt, \qquad (10.24)$$

аналогично теореме 1.2 легко доказать теорему о существовании периодического решения системы (10.1). В частности, для систем интегро-дифференциальных уравнений стандартного вида

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon X\left(t,\ x(t),\ \int_t^{t+T}\varphi(t,\ s,\ x(s))\,ds\right), \qquad (10.25)$$

где ε — малый положительный параметр, выполняется следующее утверждение [94].

Теорема 1.15. *Пусть правая часть системы интегро-дифференциальных уравнений (10.25) определена в области*

$$-\infty<t<\infty, \quad (x,\ y)\in D\times D_1, \qquad (10.26)$$

является периодической по t, s с периодом ω, непрерывна по совокупности переменных t, s, x, y и удовлетворяет неравенствам (10.2); усредненная система

$$\frac{d\xi(t)}{dt}=\varepsilon X_0(\xi), \qquad (10.27)$$

где

$$X_0(\xi)=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} X(t,\ \xi,\ y(t,\ \xi))\,dt,$$

$$y(t,\ \xi)=\int_t^{t+T}\varphi(t,\ s,\ \xi)\,ds,$$

имеет изолированное положение равновесия $\xi=\xi_0$:

$$X_0(\xi_0)=0, \qquad (10.28)$$

индекс которого отличен от нуля. Тогда при достаточно малых ε система (10.25) имеет периодическое решение с периодом ω.

В общем случае точки x_0, через которые в начальный момент времени $t=t_0=0$ проходят периодические решения, отыскиваются численным методом, описанным в § 3. Однако в отдельных случаях эта задача решается тривиально. Один из таких случаев устанавливает [94, 95]

Теорема 1.16. *Пусть для правой части системы интегро-дифференциальных уравнений*

$$\frac{dx}{dt}=f\left(t,\ x(t),\ \int_t^{t+T}\varphi(t,\ s,\ x(s))\,ds\right), \qquad (10.29)$$

удовлетворяющей неравенствам (10.2) и условиям 1, 2 (см. с. 45), выполняются тождества

$$f(t, x, y) \equiv -f(-t, x, y); \qquad (10.30)$$

$$\varphi(t, t, x) \equiv -\varphi(-t, -t, x); \qquad (10.31)$$

$$\varphi(t, t+T, x) \equiv -\varphi(-t, -t+T, x) \qquad (10.32)$$

для любых $(x, y) \in D \times D$ *и всех* $-\infty < t < \infty$. *Тогда через любую точку* $x_0 \in D - M\omega/2$ *при* $t=0$ *будет проходить решение* $x=x(t)$ *с периодом* ω *системы (10.29).*

Доказательство. Поскольку $f\left(t, x_0, \int\limits_t^{t+T} \varphi(t, s, x_0) ds\right)$ — нечетная функция по t, то функция $x_1(t, x_0)$ последовательности (10.4) будет четной как интеграл от нечетной функции. Покажем, что $f\left(t, x_1(t, x_0), \int\limits_t^{t+T} \varphi(t, s, x_1(s, x_0)) ds\right)$ является нечетной функцией. С учетом (10.30) — (10.32) имеем

$$f\left(-t, x_1(-t, x_0), \int\limits_{-t}^{-t+T} \varphi(-t, s, x(s, x_0)) ds\right) =$$

$$= -f\left(t, x_1(t, x_0), \int\limits_t^{t+T} \varphi(t, s, x(s, x_0)) ds\right).$$

Поэтому $x_2(t, x_0)$ последовательности (10.4) будет четной функцией, а $f(t, x_2(t, x_0), \int\limits_t^{t+T} \varphi(t, s, x_2(s, x_0)) ds)$ — нечетной. Методом полной математической индукции легко доказать, что все приближения (10.4), построенные для системы интегро-дифференциальных уравнений (10.29), будут четными функциями по t, а

$$f\left(t, x_m(t, x_0), \int\limits_t^{t+T} \varphi(t, s, x_m(s, x_0)) ds\right) -$$

нечетной функцией и, следовательно, $S_m(x_0)=0$ для всех $x_0 \in D - M\omega/2$, $m=0, 1, 2, \ldots$. Это значит, что предельная функция $x_\infty(t, x_0)$ будет периодическим решением системы (10.29), причем $x(0)=x_0$.

Систему (10.1) можно считать нелинейной системой интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с ограниченным последействием.

Рассмотрим теперь систему интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с бесконечным последействием вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t), \int\limits_{-\infty}^{t} R(t-s)\varphi(t, s, x(t), x(s)) ds\right), \qquad (10.33)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $K = (K_1, K_2, \ldots, K_n)$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$. Предположим, что функция $f(t, x, z)$ определена и непрерывна на множестве

$$D_f: \{R \times D_1 \times D_2;\ D_1: \|x\| \leqslant d_1,\ \ D_2: \|z\| \leqslant d_2,\ \ R: (\infty, \infty)\}; \tag{10.34}$$

φ определена и непрерывна на множестве $D_\varphi: R \times R \times D_1 \times D_1$; f и φ — функции, периодические соответственно по t и t, s с периодом ω. Кроме того, функции f и φ ограничены:

$$\|f(t, x, z)\| \leqslant M_1, \quad \|\varphi(t, s, x, y)\| \leqslant M_2 \tag{10.35}$$

и удовлетворяют условиям Липшица

$$\begin{gathered} \|f(t, x_1, z_1) - f(t, x_2, z_2)\| \leqslant N_1\|x_1 - x_2\| + N_2\|z_1 - z_2\|, \\ \|\varphi(t, s, x_1, y_1) - \varphi(t, s, x_2, y_2)\| \leqslant N_3\|x_1 - x_2\| + N_4\|y_1 - y_2\|. \end{gathered} \tag{10.36}$$

Предположим также, что функция $\int\limits_{\infty}^{t} R(t-s)\,\varphi(t, s, x(t), x(s))\,ds$ определена, непрерывна, является периодической с периодом ω для любой ω-периодической функции $x(t)$, принадлежащей области D_1, и ядро $R(t-s)$ для всех $t \in R$ удовлетворяет условиям

$$\int\limits_{-\infty}^{t} \|R(t-s)\|\,ds \leqslant K, \quad KM_2 \leqslant d_2. \tag{10.37}$$

Кроме того, выполняются следующие условия:

1) множество $D_1': \|x\| \leqslant d_1 - M_1\omega/2$ не пусто;
2) справедливо неравенство

$$q = \frac{\omega}{2}\left(N_1 + N_2K(N_3 + N_4)\right) < 1.$$

Для систем вида (10.33) имеет место следующее утверждение [21], доказательство которого аналогично доказательству теоремы 1.14.

Теорема 1.17. *Пусть функции $f(t, x, z)$, и $\varphi(t, s, x, y)$ определены и непрерывны в областях D_f и D_φ, являются периодическими по t и s с периодом ω и удовлетворяют условиям (10.36), (10.37) и 1, 2 (см. выше). Тогда если уравнение (10.33) имеет периодическое с периодом ω решение $x(t) = \psi(t)$, проходящее при $t = 0$ через точку $x_0 \in D_1'$, то оно будет удовлетворять соотношению*

$$\psi(t) = \lim_{m \to \infty} x_m(t, x_0), \tag{10.38}$$

где $x_m(t, x_0)$ — периодические по t с периодом ω функции, определяемые рекуррентными соотношениями

$$x_{m+1}(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \Bigg[f\Bigg(l, x_m(l, x_0), \int_{-\infty}^{l} R(l-s)\,\varphi(l, s, x_m(l, x_0),$$

$$x_m(s, x_0))\,ds\Bigg) - \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} f\Bigg(t, x_m(t, x_0), \int_{-\infty}^{t} R(t-s)\,\varphi(t, s, x_m(t, x_0),$$

$$x_m(s, x_0))\,ds\Bigg)\,dt\Bigg]\,dl \quad (m = 0, 1, 2, \ldots, x_0(t, x_0) = x_0).$$

§ 11. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему разностных уравнений

$$x_{n+1} = x_n + f_n(x_n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{11.1}$$

где

$$x_n = (x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(m)}), \qquad f_n = (f_n^{(1)}, \ldots, f_n^{(m)});$$

$f_n(x)$ — периодическая с периодом N m-мерная вектор-функция, определенная в некоторой ограниченной замкнутой области D евклидова пространства E_m и удовлетворяющая неравенствам

$$|f_n(x)| \leqslant \mathbf{M}; \tag{11.2}$$

$$|f_n(x') - f_n(x'')| \leqslant K|x' - x''|; \tag{11.3}$$

$\mathbf{M}$ — вектор с положительными координатами; K — матрица с неотрицательными элементами.

В дальнейшем будем рассматривать такие системы, для которых выполняются условия:

1) множество $D - MN/2$ не пусто;

2) собственные числа матрицы $Q = NK/2$ находятся в круге единичного радиуса.

Для всякой периодической функции f_n с периодом N через $\bar{f}_n$ будем обозначать ее среднее: $\bar{f}_n = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j$.

Следующее утверждение аналогично лемме 1.1 [57, 77].

Лемма 1.5. *Пусть $n \in [0, N-1]$. Тогда*

$$\left|\sum_{i=0}^{n} (f_i - \bar{f}_n)\right| \leqslant 2(n+1)\left(1 - \frac{n+1}{N}\right)|f_n|_0. \tag{11.4}$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{i=0}^{n}\left(f_i - \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j\right) = \left(1 - \frac{n+1}{N}\right)\sum_{i=1}^{n} f_i - \frac{n+1}{N}\sum_{i=n+1}^{N-1} f_i.$$

Отсюда

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(f_i-\bar f_n)\right|\leqslant\left|\left(1-\frac{1+n}{N}\right)\sum_{i=1}^{n}f_i\right|+\frac{n+1}{N}\left|\sum_{i=n+1}^{N-1}f_i\right|\leqslant$$

$$\leqslant(n+1)\left(1-\frac{n+1}{N}\right)|f_n|_0+\frac{n+1}{N}(N-1-n)|f_n|_0=$$

$$=2(n+1)\left(1-\frac{n+1}{N}\right)|f_n|_0=\alpha_n|f_n|_0,$$

где $\alpha_n=2(n+1)\left(1-\frac{n+1}{N}\right)$. Предположим, что система (11.1) имеет периодическое с периодом N решение и известна точка x_0, через которую это решение проходит при $n=n_0=0$. Тогда справедлива [48, 57]

Теорема 1.18. *Пусть φ_n — периодическое с периодом N решение системы (11.1), проходящее через точку $x_0\in D—\mathbf{M}N/_2$. Тогда*

$$\varphi_n=\lim_{k\to\infty}x_n^{(k)}(x_0)\tag{11.5}$$

равномерно относительно n, x_0 и

$$|\varphi_n-x_n^{(k)}(x_0)|\leqslant Q^k(E-Q)^{-1}\mathbf{M}N/2,\tag{11.6}$$

где $x_n^{(k)}(x_0)$ — периодические по n функции, определяемые соотношениями

$$x_n^{(k)}(x_0)=x_0+\sum_{i=0}^{n-1}[f_i(x_i^{(k-1)}(x_0))-\overline{f_n(x_n^{(k-1)}(x_0))}],$$

$$x_i^{(0)}(x_0)=x_0,\quad k=1,2,\ldots\tag{11.7}$$

Доказательство. Каждая из функций последовательности (11.7) является периодической по n с периодом N и в силу леммы 1.5 имеет место оценка

$$|x_n^{(k)}(x_0)-x_0|\leqslant 2\mathbf{M}n\left(1-\frac{n}{N}\right)\leqslant\frac{N}{2}\mathbf{M},\tag{11.8}$$

т. е. $x_n^{(k)}(x_0)\in D$ для всех n и k, если $x_0\in D-\mathbf{M}N/2$.

Докажем сходимость последовательности (11.7). Оценивая разность $x_n^{(2)}(x_0)-x_n^{(1)}(x_0)$, получаем

$$|x_n^{(2)}(x_0)-x_n^{(1)}(x_0)|\leqslant\left(1-\frac{n}{N}\right)\sum_{i=0}^{n-1}K|x_i^{(1)}(x_0)-x_0|+\frac{n}{N}\sum_{i=n}^{N-1}K|x_i^{(1)}(x_0)-$$

$$-x_0|=\left(1-\frac{n}{N}\right)\sum_{i=0}^{N-1}KM\alpha_i+\frac{n}{N}\sum_{i=n}^{N-1}K\mathbf{M}\alpha_i=\beta_nK\mathbf{M},\tag{11.9}$$

$$\beta_n = \frac{\alpha_n \alpha_{n-1}}{n^2} + \frac{(n+1)(n+2)}{6N}\alpha_{n-1} + n\left(\frac{N}{3} - \frac{1}{3N}\right) - $$

$$- \frac{n^2}{6N}\alpha_n - \frac{n^2(n+1)(n+2)}{3N^2}. \qquad (11.10)$$

Легко показать, что $\beta_n \leqslant N^2/4$, и, следовательно,

$$|x_n^{(2)}(x_0) - x_n^{(1)}(x_0)| \leqslant (NK/2)(\mathbf{M}N/2). \qquad (11.11)$$

Методом полной математической индукции доказывается, что

$$|x_n^{(k+1)}(x_0) - x_n^{(k)}(x_0)| \leqslant (NK/2)^k(\mathbf{M}N/2) \qquad (11.12)$$

для всех n и $k=0, 1, 2, \ldots$ Последнее неравенство с учетом условия 2 (см. с. 52) доказывает равномерную относительно x_0 и n сходимость последовательности периодических функций (11.5). Переходя в (11.7) к пределу при $k \to \infty$, убеждаемся, что предельная функция $x_n(x_0)$ удовлетворяет уравнению

$$x_n(x_0) = x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} [f_i(x_i(x_0)) - \overline{f_n(x_n(x_0))}]. \qquad (11.13)$$

Учитывая неравенство (11.12), получаем оценку

$$|x_n^{(k+s)} - x_n^{(k)}(x_0)| \leqslant \sum_{i=0}^{s-1} (NK/2)^{k+i}(\mathbf{M}N/2),$$

из которой в силу условия 2 следует

$$|x_n(x_0) - x_n^{(k)}(x_0)| \leqslant Q^k(E-Q)^{-1}(\mathbf{M}N/2). \qquad (11.14)$$

По условию теоремы 1.18 функция φ_n является периодическим решением уравнения (11.1) $\left(\text{следовательно, выполняются соотношения } \varphi_n = x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} f_i(\varphi_i)\right)$ и обладает свойством $\overline{f_n(\varphi_n)} = 0$, а значит, вместе с $x_n(x_0)$ является периодическим решением уравнения (11.13). Методом от противного легко доказать, что уравнение (11.13) не может иметь два различных периодических решения, а следовательно, справедливо соотношение (11.5).

Выясним теперь вопрос существования периодических решений системы (11.1). Согласно теореме 1.18 отыскание периодического решения системы (11.1) сводится к вычислению функции $x_n^{(k)}(x_0)$, если известно, что такое решение существует и известна точка x_0, через которую оно проходит. Обозначим через $S(x_0)$ выражение

$$S(x_0) = \overline{f_n(x_n(x_0))} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f_i(x_i(x_0)), \qquad (11.15)$$

где $x_n(x_0)$ удовлетворяет уравнению (11.13). Выберем точку x_0 как решение уравнения $S(x_0)=0$. Тогда уравнение (11.13) переходит в уравнение

$$x_n(x_0) = x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} f_i(x_i(x_0)), \tag{11.16}$$

и, следовательно, функция $x_n(x_0)$ при таком выборе начальной точки x_0 будет периодическим решением уравнения (11.1).

Таким образом, вопрос существования периодических решений системы разностных уравнений (11.1) сводится к вопросу существования нулей функции $S(x_0)$. Поскольку найти предельную функцию $x_n(x_0)$ последовательности (11.7), а следовательно, определить $S(x_0)$ в общем случае невозможно, то, исходя из приближений $x^{(k)}(x_0)$, вычислим функцию

$$S^{(k)}(x_0) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i(x_i^{(k)}(x_0)) \tag{11.17}$$

и поставим следующую задачу: на основании отображения (11.17) решить вопрос о существовании нулей отображения (11.15), а значит, о существовании периодических решений системы (11.1). Решение этой задачи устанавливает теорема, аналогичная теореме 1.2.

§ 12. ДВУСТОРОННИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(t, x(t), x(t-\Delta)), \tag{12.1}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(t, x, y) = g_1(t, x, y)$, $g_2(t, x, y), \ldots, g_n(t, x, y)$ — элементы евклидова пространства E_n, $g(t, x, y)$ — периодическая по t функция с периодом ω, $0 \leqslant \Delta \leqslant \omega$. Положим

$$g(t, x(t), x(t-\Delta)) = f(t, x(t), x(t-\Delta), x(t), x(t-\Delta))$$

и рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t-\Delta), x(t), x(t-\Delta)), \tag{12.2}$$

относительно которой предположим, что функция $f(t, x, y, u, v)$ определена в области

$$\begin{gathered} t \in (-\infty, \infty), \quad x, y, u, v \in [a, b], \\ a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in E_n, \quad b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in E_n, \end{gathered} \tag{12.3}$$

непрерывна по совокупности переменных t, x, y, u, v, является периодической по t с периодом ω и удовлетворяет неравенствам

$$\mathbf{m} \leqslant f(t, x, y, u, v) \leqslant \mathbf{M}, \tag{12.4}$$
$$\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in E_n, \quad \mathbf{M} = (M_1, M_2, \dots, M_n) \in E_n;$$

$$f(t, x, y, u, v) \leqslant f(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v}) \tag{12.5}$$

при $x \leqslant \bar{x}$, $y \leqslant \bar{y}$, $u \geqslant \bar{u}$, $v \geqslant \bar{v}$. Относительно постоянных ω, $\mathbf{M}$, $\mathbf{m}$, b, a предположим, что они удовлетворяют неравенству

$$\frac{\omega}{2}(\mathbf{M} - \mathbf{m}) \leqslant b - a. \tag{12.6}$$

Определим две последовательности функций $\{u_n(t, x_0)\}$, $\{v_n(t, x_0)\}$, $n = 0, 1, \dots$, с помощью рекуррентных соотношений

$$u_{n+1}(t, x_0) = x_0 + \left(1 - \frac{t}{\omega}\right) \int_0^t f\Big(s, u_n(s, x_0), u_n(s - \Delta, x_0), v_n(s, x_0),$$
$$v_n(s - \Delta, x_0)\Big) ds - \frac{t}{\omega} \int_t^\omega f(s, v_n(s, x_0), v_n(s - \Delta, x_0), u_n(s, x_0),$$
$$u_n(s - \Delta, x_0))\, ds,$$
$$v_{n+1}(t, x_0) = x_0 + \left(1 - \frac{t}{\omega}\right) \int_0^t f(s, v_n(s, x_0), v_n(s - \Delta, x_0), \tag{12.7}$$
$$u_n(s, x_0), u_n(s - \Delta, x_0))\, ds - \frac{t}{\omega} \int^\omega f(s, u_n(s, x_0), u_n(s - \Delta, x_0),$$
$$v_n(s, x_0), v_n(s - \Delta, x_0))\, ds,$$

причем нулевыми приближениями являются

$$u_0(t, x_0) = x_0 - \frac{1}{2}\alpha_1(t)(\mathbf{M} - \mathbf{m}), \quad v_0(t, x_0) = x_0 + \frac{1}{2}\alpha_1(t)(\mathbf{M} - \mathbf{m}),$$
$$u_0(t - \Delta, x_0) = x_0 - \frac{\mathbf{M} - \mathbf{m}}{2} \begin{cases} \alpha_1(t - \Delta + \omega) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \Delta, \\ \alpha_1(t - \Delta) & \text{при } \Delta \leqslant t \leqslant \omega, \end{cases} \tag{12.8}$$
$$v_0(t - \Delta, x_0) = x_0 + \frac{\mathbf{M} - \mathbf{m}}{2} \begin{cases} \alpha_1(t - \Delta + \omega) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \Delta, \\ \alpha_1(t - \Delta) & \text{при } \Delta \leqslant t \leqslant \omega, \end{cases}$$

где

$$\alpha_1(t) = 2t\left(1 - \frac{t}{\omega}\right), \quad a + \frac{\omega}{4}(\mathbf{M} - \mathbf{m}) \leqslant x_0 \leqslant b - \frac{\omega}{4}(\mathbf{M} - \mathbf{m}).$$

Очевидно, что функции $u_n(t, x_0)$, $v_n(t, x_0)$ для всех $n=0, 1, 2, \ldots$ удовлетворяют условиям

$$u_n(0) = u_n(\omega) = x_0, \quad a \leqslant u_n(t, x_0) \leqslant b,$$
$$v_n(0) = v_n(\omega) = x_0, \quad a \leqslant v_n(t, x_0) \leqslant b. \qquad (12.9)$$

Покажем, что выполняются соотношения

$$u_0(t, x_0) \leqslant u_1(t, x_0) \leqslant \ldots \leqslant u_n(t, x_0) \leqslant \ldots \leqslant v_n(t, x_0) \leqslant \ldots$$
$$\ldots \leqslant v_1(t, x_0) \leqslant v_0(t, x_0). \qquad (12.10)$$

Действительно, учитывая (12.4), (12.5), (12.8), из соотношений (12.7) при $n = 0$ получаем неравенства

$$u_1(t, x_0) \geqslant x_0 + \left(1 - \frac{t}{\omega}\right)\int_0^t \mathrm{m}ds - \frac{t}{\omega}\int_t^\omega \mathrm{M}ds = u_0(t, x_0),$$

$$v_1(t, x_0) \leqslant x_0 + \left(1 - \frac{t}{\omega}\right)\int_0^t \mathrm{M}ds - \frac{t}{\omega}\int_t^\omega \mathrm{m}ds = v_0(t, x_0),$$

$$u_2(t, x_0) \geqslant x_0 + \left(1 - \frac{t}{\omega}\right)\int_0^t f(s, u_0(s, x_0), u_0(s - \Delta, x_0), v_0(s, x_0),$$

$$v_0(s - \Delta, x_0))\, ds - \frac{t}{\omega}\int_t^\omega f(s, v_0(s, x_0), v_0(s - \Delta, x_0), u_0(s, x_0), u_0(s -$$

$$- \Delta, x_0))\, ds = u_1(t, x_0), \quad v_2(t, x_0) \leqslant x_0 + \left(1 - \frac{t}{\omega}\right)\int_0^t f(s, v_0(s, x_0),$$

$$v_0(s - \Delta, x_0), u_0(s, x_0), u_0(s - \Delta, x_0))\, ds - \frac{t}{\omega}\int_t^\omega f(s, u_0(s, x_0), u_0(s - \Delta, x_0),$$

$$v_0(s, x_0), v_0(s - \Delta, x_0))\, ds = v_1(t, x_0).$$

Методом математической индукции легко доказать, что при всех $n=0, 1, 2, \ldots$ справедливы неравенства

$$u_n(t, x_0) \leqslant u_{n+1}(t, x_0), \quad v_{n+1}(t, x_0) \leqslant v_n(t, x_0). \qquad (12.11)$$

С учетом очевидного неравенства

$$u_n(t, x_0) \leqslant v_n(t, x_0)$$

из неравенства (12.11) следует неравенство (12.10).

Предположим, что $x^*(t, x_0) \in [a, b]$ является решением уравнения

$$x(t, x_0) = x_0 + \left(1 - \frac{t}{\omega}\right)\int_0^t f(s, x(s, x_0), x(s - \Delta, x_0), x(s, x_0), x(s - \Delta,$$

$$x_0))\, ds - \frac{t}{\omega}\int_t^\omega f(s, x(s, x_0), x(s - \Delta, x_0), x(s, x_0), x(s - \Delta, x_0))\, ds. \qquad (12.12)$$

Учитывая (12.5), (12.8), (12.12), получаем

$$x^*(t, x_0) \geqslant x_0 + \left(1 - \frac{t}{\omega}\right) \int_0^t f(s, a, a, b, b)\, ds - \frac{t}{\omega} \int_t^\omega f(s, b, b, a, a)\, ds \geqslant$$

$$\geqslant x_0 + t\left(1 - \frac{t}{\omega}\right) \mathbf{m} - \frac{t}{\omega}(\omega - t)\mathbf{M} =$$

$$= x_0 - \frac{1}{2}\alpha_1(t)(\mathbf{M} - \mathbf{m}) = u_0(t, x_0),$$

$$x^*(t, x_0) \leqslant x_0 + \left(1 - \frac{t}{\omega}\right) \int_0^t f(s, b, b, a, a)\, ds - \frac{t}{\omega} \int_t^\omega f(s, a, a, b, b)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant x_0 + \left(1 - \frac{t}{\omega}\right) t\mathbf{M} - \frac{t}{\omega}(\omega - t)\mathbf{m} = x_0 + \frac{1}{2}\alpha_1(t)(\mathbf{M} - \mathbf{m}) = v_0(t, x_0).$$

Таким образом, выполняется неравенство

$$u_n(t, x_0) \leqslant x^*(t, x_0) \leqslant v_n(t, x_0). \tag{12.13}$$

В силу непрерывности функции $f(t, x, y, u, v)$ последовательности $\{u_n(t, x_0)\}$, $\{v_n(t, x_0)\}$ равностепенно непрерывны и равномерно ограничены. Кроме того, они монотонны и ограничены сверху и снизу и, следовательно, сходятся соответственно к функциям $u_\infty(t, x_0)$ и $v_\infty(t, x_0)$, причем в силу (12.13) имеет место неравенство

$$u_\infty(t, x_0) \leqslant x^*(t, x_0) \leqslant v_\infty(t, x_0).$$

Предположим дополнительно, что функция $f(t, x, y, u, v)$ в области (12.3) удовлетворяет условиям

$$f(t, x', y', u', v') - f(t, x'', y'', u'', v'') \leqslant K_1(x' - x'') + K_2(y' - y'') +$$
$$+ K_3(u'' - u') + K_4(v'' - v') \tag{12.14}$$

при $x' \geqslant x''$, $y' \geqslant y''$, $u'' \geqslant u'$, $v'' \geqslant v'$, где K_1, K_2, K_3, K_4 — $(n \times n)$-мерные матрицы с неотрицательными элементами, и собственные числа матрицы

$$Q = (K_1 + K_2 + K_3 + K_4)\left[\frac{\omega}{3} + \frac{3\Delta^2}{2\omega}\left(1 - \frac{\Delta}{\omega}\right)^2\right]$$

находятся в круге единичного радиуса. Используя неравенство (12.14), оценим разность $v_n(t, x_0) - u_n(t, x_0)$. Из соотношений (12.7), (12.8) получаем

$$v_0(t, x_0) - u_0(t, x_0) = \alpha_1(t)(\mathbf{M} - \mathbf{m}),$$

$$v_1(t, x_0) - u_1(t, x_0) = \left(1 - \frac{t}{\omega}\right) \int_0^t \{f(s, v_0(s, x_0), v_0(s - \Delta, x_0),$$

$$u_0(s, x_0), u_0(s - \Delta, x_0)) - f(s, u_0(s, x_0), u_0(s - \Delta, x_0), v_0(s, x_0),$$

$$v_0(s-\Delta, x_0))\} ds + \frac{t}{\omega}\int_0^{\omega} \{f(s, v_0(s, x_0), v_0(s-\Delta, x_0), u_0(s, x_0),$$

(12.15)

$$u_0(s-\Delta, x_0)) - f(s, u_0(s, x_0), u_0(s-\Delta, x_0), v_0(s, x_0), v_0(s-\Delta, x_0))\} ds \leqslant$$

$$\leqslant \left(1-\frac{t}{\omega}\right)\int_0^t \{(K_1+K_3)(v_0(s, x_0)-u_0(s, x_0)) + (K_2+K_4)(v_0(s-$$

$$-\Delta, x_0) - u_0(s-\Delta, x_0))\} ds + \frac{t}{\omega}\int_t^{\omega} \{(K_1+K_3)(v_0(s, x_0)-u_0(s, x_0)) +$$

$$+ (K_2+K_4)(v_0(s-\Delta, x_0) - u_0(s-\Delta, x_0)\} ds \leqslant (K_1+K_3) \times$$

$$\times \left\{\left(1-\frac{t}{\omega}\right)\int_0^t \alpha_1(t)\,dt + \frac{t}{\omega}\int_t^{\omega}\alpha_1(t)\,dt\right\}(\mathbf{M}-\mathbf{m})(K_2+K_4)\left\{\left(1-\frac{t}{\omega}\right)\times\right.$$

$$\times \int_{-\Delta}^{t-\Delta} [v_0(s_1, x_0) - u_0(s_1, x_0)]\,ds_1 +$$

$$\left.+ \frac{t}{\omega}\int_{t-\Delta}^{\omega-\Delta} [v_0(s_1, x_0) - u_0(s_1, x_0)]\,ds_1\right\}(\mathbf{M}-\mathbf{m}).$$

С учетом неравенств (12.8) неравенство (12.15) можно записать в виде

$$v_1(t, x_0) \quad u_1(t, x_0) \leqslant \alpha_2(t)(K_1+K_3)(\mathbf{M}-\mathbf{m}) +$$
$$+ \beta_2(t, \Delta)(K_2+K_4)(\mathbf{M}-\mathbf{m}),$$

откуда на основании оценок (2.9), (2.10), (2.14) и (2.18) из § 2 получаем

$$v_1(t, x_0) - u_1(t, x_0) \leqslant \alpha_1(t)\,Q\,(\mathbf{M}-\mathbf{m}).$$

По индукции легко заключаем, что для всех $n=0, 1, 2, \ldots$ справедлива оценка

$$v_n(t, x_0) - u_n(t, x_0) \leqslant \alpha_1(t)\,Q^n\,(\mathbf{M}-\mathbf{m}). \tag{12.16}$$

Так как собственные числа матрицы Q принадлежат кругу единичного радиуса, то из неравенства (12.16) находим

$$u_\infty(t, x_0) = v_\infty(t, x_0) = x_\infty(t, x_0). \tag{12.17}$$

Из этого соотношения видно, что последовательности $\{u_n(t, x_0)\}$, $\{v_n(t, x_0)\}$ при $n\to\infty$ стремятся к общему пределу, причем предельная функция $x_\infty(t, x_0)$ является периодическим решением уравнения (12.12).

Пусть $x=\varphi(t)$ — периодическое с периодом ω решение системы (12.2), проходящее при $t=0$ через точку

$$x_0 \in \left[a + \frac{\omega}{4}(\mathbf{M}-\mathbf{m}),\ b - \frac{\omega}{4}(\mathbf{M}-\mathbf{m})\right]$$

и удовлетворяющее уравнению (12.12). Методом от противного легко доказать единственность этого решения, а следовательно, справедливость равенства

$$\varphi(t) = x^*(t, x_0). \tag{12.18}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1.19 [139]. *Пусть правая часть системы (12.2) определена в области (12.3), непрерывна по совокупности своих переменных, является периодической по t с периодом ω и удовлетворяет неравенствам (12.4), (12.5), (12.6). Тогда последовательности $\{u_n(t, x_0)\}$, $\{v_n(t, x_0)\}$, определяемые соотношениями (12.7), (12.8), удовлетворяют условиям*

$$u_n(0, x_0) = u_n(\omega, x_0) = x_0, \quad v_n(0, x_0) = v_n(\omega, x_0) = x_0$$

и неравенствам

$$a \leqslant u_n(t, x_0) \leqslant b, \quad a \leqslant v_n(t, x_0) \leqslant b,$$

$$u_0(t, x_0) \leqslant u_1(t, x_0) \leqslant \ldots \leqslant u_n(t, x_0) \leqslant \ldots \leqslant v_n(t, x_0) \leqslant \ldots$$

$$\ldots \leqslant v_n(t, x_0) \leqslant v_0(t, x_0)$$

и равномерно относительно t, x_0 сходятся к функциям $u_\infty(t, x_0)$, $v_\infty(t, x_0)$, причем эти функции удовлетворяют уравнению (12.12).

Если $x^*(t, x_0) \in [a, b]$ является периодическим решением уравнения (12.12), то выполняются неравенства

$$u_n(t, x_0) \leqslant u_\infty(t, x_0) \leqslant x^*(t, x_0) \leqslant v_\infty(t, x_0) \leqslant v_n(t, x_0).$$

В предположении, что правая часть уравнения (12.2) удовлетворяет условиям (12.14), имеет место оценка

$$v_n(t, x_0) - u_n(t, x_0) \leqslant \alpha_1(t) Q^n (\mathbf{M} - \mathbf{m}),$$

предельные функции $u_\infty(t, x_0)$, $v_\infty(t, x_0)$ совпадают и для периодического с периодом ω решения $x = \varphi(t)$ системы уравнений (12.2), проходящего при $t = 0$ через точку

$$x_0 \in \left[a + \frac{\omega}{4}(\mathbf{M} - \mathbf{m}),\ b - \frac{\omega}{4}(\mathbf{M} - \mathbf{m})\right],$$

выполняется соотношение

$$\varphi(t) = u_\infty(t, x_0) = v_\infty(t, x_0) = x_\infty(t, x_0).$$

Выясним теперь вопрос существования периодических по t с периодом ω решений системы (12.2). С этой целью введем обозначения

$$S(x_0) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega f(t, x_\infty(t, x_0)\, x_\infty(t - \Delta, x_0),\ x_\infty(t, x_0),\ x_\infty(t - \Delta, x_0))\, dt, \tag{12.19}$$

$$\underline{S}_m(x_0) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega f(t, u_m(t, x_0),\ u_m(t - \Delta, x_0),\ v_m(t, x_0),\ v_m(t - \Delta, x_0))\, dt,$$

$$\overline{S}_m(x_0) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega f(t, v_m(t, x_0),\ v_m(t - \Delta, x_0),\ u_m(t, x_0),\ u_m(t - \Delta, x_0))\, dt.$$

Пусть $x_\infty(t, x_0)$ — периодическое по t с периодом ω решение уравнения (12.12). Тогда очевидно, что при $S(x_0)=0$ периодическое решение уравнения (12.12) является периодическим решением системы (12.2) и, таким образом, вопрос существования периодических решений уравнения (12.2) сводится к вопросу существования нулей функция $S(x_0)$. Последний вопрос можно решать, исходя из функций $\bar{S}_m(x_0)$ или $\underline{S}_m(x_0)$.

В силу условия (12.5) и неравенства (12.10) выполняются неравенства

$$\underline{S}_m(x_0) \leqslant S(x_0) \leqslant \bar{S}_m(x_0). \qquad (12.20)$$

Благодаря непрерывности функции $S(x_0)$ из неравенства (12.20) следует

Теорема 1.20 [139]. *Если для некоторого целого числа m $\underline{S}_m(x_0)>0$ или $\bar{S}_m(x_0)<0$, то система уравнений (13.2) не имеет в области $[a, b]$ периодических с периодом ω решений, проходящих через точку $(0, x_0)$.*

В других случаях вопрос существования периодических решений системы (12.2) решается утверждением, аналогичным теореме 1.2.

Приведем некоторые примеры перехода от уравнения (12.1) к уравнению (12.2) с правой частью, удовлетворяющей неравенству (12.5).

1. Предположим, что в некоторой области функция $g(t, x, y)$ удовлетворяет условиям

$$-M \leqslant \frac{\partial g(t, x, y)}{\partial x} \leqslant M, \quad -N \leqslant \frac{\partial g(t, x, y)}{\partial y} \leqslant N.$$

Тогда функция

$$f(t, x, y, u, v) = \frac{1}{2}[g(t, x, y) + Mx + Ny] + \frac{1}{2}[g(t, u, v) - Mu - Nv]$$

в рассматриваемой области будет удовлетворять условиям (12.5) и

$$f(t, x(t), x(t-\Delta), x(t), x(t-\Delta)) = g(t, x(t), x(t-\Delta)). \qquad (12.21)$$

2. Пусть в некоторой области выполняются неравенства

$$-h(t, x, y) + h(t, u, v) \leqslant g(t, x, y) - g(t, u, v) \leqslant h(t, x, y) - h(t, u, v)$$

при $x \geqslant u$, $y \geqslant v$. Тогда функция

$$f(t, x, y, u, v) = \frac{1}{2}[g(t, x, y) + h(t, x, y)] + \frac{1}{2}[g(t, u, v) - h(t, u, v)]$$

будет обладать свойством (12.5) и для нее будет выполняться соотношение (12.21).

Проиллюстрируем общие положения изложенного выше на примере, рассмотренном в § 6:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \varepsilon[x^2(t) - \sin t - x(t-\Delta)\cos t + 0{,}001],$$

$$0 < \varepsilon \leqslant 0{,}06, \qquad 0 \leqslant \Delta \leqslant 2\pi, \qquad (12.22)$$

причем правая часть этого соотношения определена в области

$$-\infty < t < \infty, \quad |x| \leqslant 0{,}25, \quad |y| \leqslant 0{,}25. \qquad (12.23)$$

В § 6 было показано, что при $\varepsilon=0{,}01$ для всех Δ из отрезков

$$0 \leqslant \Delta \leqslant 5\pi/18, \quad 31\pi/18 \leqslant \Delta \leqslant 2\pi$$

через точку x_0, близкую к точке

$$x_0^{(1)} = \frac{(4+\sin\Delta)\,\varepsilon + \sqrt{(4+\sin\Delta)^2\,\varepsilon^2 - 4\,(2+\varepsilon^2)\,(0{,}002+3\varepsilon^2-\varepsilon\cos\Delta)}}{2+\varepsilon^2},$$

проходит при $t=0$ периодическое с периодом 2π решение уравнения (12.22).

Найдем двусторонние приближения к указанному периодическому решению. Обозначим правую часть уравнения (12.22) через $g(t, x, y)$:

$$g(t, x, y) = \varepsilon\,(x^2 - \sin t - y\cos t + 0{,}001).$$

Поскольку функция $g(t, x, y)$ в области (12.23) удовлетворяет неравенствам

$$\left|\frac{\partial g(t, x, y)}{\partial x}\right| \leqslant 0{,}5\varepsilon, \quad \left|\frac{\partial g(t, x, y)}{\partial y}\right| \leqslant \varepsilon,$$

то функция

$$f(t, x, y, u, v) = \frac{\varepsilon}{2}\,[x^2 - \sin t - y\cos t + 0{,}001 + 0{,}5x + y] +$$
$$+ \frac{\varepsilon}{2}\,[u^2 - \sin t - v\cos t + 0{,}001 - 0{,}5u - v]$$

удовлетворяет условию (12.5), причем в области (12.23) выполняется равенство (12.21) и тогда

$$|f(t, x, y, u, v)| \leqslant 1{,}696\varepsilon.$$

Из рекуррентного соотношения (12.7) получаем следующий аналитический вид нулевого и первого двусторонних приближений для $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$:

$$u_0(t, x_0) = x_0 - 3{,}392\varepsilon\,(1 - t/2\pi), \quad v_0(t, x_0) = x_0 + 3{,}392\varepsilon\,(1 - t/2\pi);$$

$$u_1(t, x_0) = \begin{cases} u_1'(t, x_0) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \Delta, \\ u_1''(t, x_0) & \text{при } \Delta \leqslant t \leqslant 2\pi; \end{cases}$$

$$v_1(t, x_0) = \begin{cases} v_1'(t, x_0) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \Delta, \\ v_1''(t, x_0) & \text{при } \Delta \leqslant t \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

где

$$u_1'(t, x_0) = x_0 + \varepsilon\left(1 - \frac{t}{2\pi}\right)\left\{(0{,}001 + x_0^2)\,t + \cos t - 1 + \frac{3{,}392^2}{3}\,\varepsilon^3 t^3 + \right.$$
$$+ \frac{1{,}696^2}{5\pi^2}\,\varepsilon^2 t^5 - \frac{1{,}696}{\pi}\,\varepsilon^2 t^4 - x_0 \sin t - 0{,}848\varepsilon t^2 +$$

$$+ \frac{0,283}{\pi} \varepsilon t^3 + 1,696\varepsilon [(2\pi - \Delta)^2 - (t - \Delta + 2\pi)^2] -$$

$$- \frac{0,566}{\pi} \varepsilon [(2\pi - \Delta)^2 - (t - \Delta + 2\pi)^2] + \frac{0,566}{\pi} \varepsilon [(2\pi - \Delta)^3 -$$

$$- (t - \Delta + 2\pi)^3]\Big\} - \varepsilon \frac{t}{2\pi} \Big\{(0,001 + x_0^2)(2\pi - \Delta) + 1 - \cos t +$$

$$+ \left(\frac{3,392}{3} - \frac{0,283}{\pi\varepsilon}\right) \varepsilon^2 (8\pi^3 - t^3) + \frac{1,696^2\varepsilon^2}{5\pi^2} (32\pi^5 - t^5) -$$

$$- \frac{1,696}{\pi} \varepsilon^2 (16\pi^4 - t^4) + x_0 \sin t + 0,848\varepsilon (4\pi^2 - t^2) +$$

$$+ 1,696\varepsilon [4\pi^2 + (2\pi - \Delta)^2 - (t - \Delta + 2\pi)^2] -$$

$$- \frac{0,566}{\pi} \varepsilon [8\pi^3 + (2\pi - \Delta)^3 - (t - \Delta + 2\pi)^3]\Big\};$$

$$u_1''(t, x_0) = x_0 + \varepsilon \left(1 - \frac{t}{2\pi}\right) \Big\{(0,001 + x_0^2) t + \cos t - 1 +$$

$$+ \frac{3,392}{3} \varepsilon^2 t^3 + \frac{1,696}{5\pi^2} \varepsilon^2 t^5 - \frac{1,696}{\pi} \varepsilon^2 t^4 - x_0 \sin t - 0,848\varepsilon t^2 +$$

$$+ \frac{0,283}{\pi} \varepsilon t^3 - 1,696\varepsilon [(t - \Delta)^2 + 4\pi^2 - (\ \pi - \Delta)^2] +$$

$$+ \frac{0,566}{\pi} \varepsilon [(t - \Delta)^3 + 8\pi^3 - (2\pi - \Delta)^3]\Big\} - \varepsilon \frac{t}{2\pi} \Big\{(0,001 + x_0^2)(2\pi - t) +$$

$$+ 1 - \cos t + \varepsilon^2 \left(\frac{3,392^2}{3} - \frac{0,283}{\pi\varepsilon}\right)(8\pi^3 - t^3) + \frac{1,696^2\varepsilon^2}{5\pi^2} (32\pi^5 - t^5) -$$

$$- \frac{1,696^2\varepsilon^2}{\pi} (16\pi^4 - t^4) + x_0 \sin t + 0,848\varepsilon (4\pi^2 - t^2) +$$

$$+ 1,696\varepsilon [(2\pi - \Delta)^2 - (t - \Delta)^2] - \frac{0,566}{\pi} \varepsilon [(2\pi - \Delta)^2 - (t - \Delta)^2]\Big\};$$

$$v_1'(t, x_0) = x_0 + \varepsilon \left(1 - \frac{t}{2\pi}\right) \Big\{(0,001 + x_0^2) t + \cos t - 1 +$$

$$+ \left(\frac{3,392}{3} - \frac{0,283}{\pi\varepsilon}\right) \varepsilon^2 t^3 + \frac{1,696}{5\pi^2} \varepsilon^2 t^5 - \frac{1,696}{\pi} \varepsilon^2 t^4 - x_0 \sin t +$$

$$+ 0,848\varepsilon t^2 + 1,696 [(t - \Delta + 2\pi)^2 - (2\pi - \Delta)^2] -$$

$$- \frac{0,566}{\pi} \varepsilon [(t - \Delta + 2\pi)^3 - (2\pi - \Delta)^3]\Big\} - \varepsilon \frac{t}{2\pi} \Big\{(0,001 + x_0^2)(2\pi - t) +$$

$$+ 1 - \cos t + \left(\frac{3,392^2}{3} + \frac{0,283}{\pi\varepsilon}\right) \varepsilon^3 (8\pi^3 - t^3) + \frac{1,696}{5\pi^2} \varepsilon^2 (32\pi^5 - t^5) -$$

$$- \frac{1,696^2\varepsilon^2}{\pi} (16\pi^4 - t^4) + x_0 \sin t - 0,848\varepsilon (4\pi^2 - t^2) -$$

$$- 1{,}696\varepsilon\,[(2\pi-\Delta)^2+4\pi^2-(t-\Delta+2\pi)^2]+$$
$$+\frac{0{,}566}{\pi}\,\varepsilon\,[(2\pi-\Delta)^3+8\pi^3-(t-\Delta+2\pi)^3]\Big\};$$
$$v_1''(t, x_0)=x_0+\varepsilon\left(1-\frac{t}{2\pi}\right)\Big\{(0{,}001+x_0^2)\,t+\cos t-1+$$
$$+\left(\frac{3{,}392^2}{3}-\frac{0{,}283}{\pi\varepsilon}\right)\varepsilon^2t^3+\frac{1{,}696^2}{5\pi^2}\,\varepsilon^2t^5-\frac{1{,}696^2}{\pi}\,\varepsilon^2t^4-x_0\sin t+$$
$$+0{,}848\varepsilon t^2+1{,}696\varepsilon\,[(t-\Delta)^2+4\pi^2-(2\pi-\Delta)^2]-$$
$$-\frac{0{,}566\varepsilon}{\pi}[(t-\Delta)^3+8\pi^3-(2\pi-\Delta)^3]\Big\}-\varepsilon\frac{t}{2\pi}\Big\{(0{,}001+x_0^2)(2\pi-t)+$$
$$+1-\cos t+\left(\frac{3{,}392}{3}+\frac{0{,}283}{\pi\varepsilon}\right)\varepsilon^2(8\pi^3-t^3)+\frac{1{,}696}{5\pi^2}\,\varepsilon^2(32\pi^5-t^5)-$$
$$-\frac{1{,}696}{\pi}\,\varepsilon^2(16\pi^4-t^4)+x_0\sin t-0{,}848\varepsilon\,(4\pi^2-t^2)-$$
$$-1{,}696\,[(2\pi-\Delta)^2-(t-\Delta)^2]+\frac{0{,}566}{\pi}\,\varepsilon\,[(2\pi-\Delta)^3-(t-\Delta)^3]\Big\}.$$

§ 13. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим дифференциально-операторное уравнение вида

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x, Ax), \tag{13.1}$$

где A — оператор, заданный на пространстве непрерывных функций. Будем предполагать, что $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — n-мерный вектор; $y=(y_1, y_2, \dots, y_s)$ — конечномерный ($s<\infty$) или бесконечномерный ($s=\infty$) вектор; $f(t, x, y)=(f_1(t, x, y);\ f_2(t, x, y), \dots, f_n(t, x, y))$ — n-мерная вектор-функция, определенная для $(t, x, y)\in R\times D\times D_1$, где $R=(-\infty, \infty)$; D — область n-мерного евклидова пространства E_n; D_1 — область конечномерного или бесконечномерного пространства. Кроме того, функция $f(t, x, y)$ является периодической по t с периодом ω:

$$f(t, x, y)\equiv f(t+\omega, x, y), \tag{13.2}$$

непрерывной по совокупности переменных t, x, y в области $R\times\times D\times D_1$, ограниченной:

$$|f(t, x, y)|\leqslant \mathbf{M} \tag{13.3}$$

и удовлетворяющей по x, y условию Липшица:

$$|f(t, x_1, y_1)-f(t, x_2, y_2)|\leqslant K\,|x-x_1|+Q\,|y-y_1| \tag{13.4}$$

для всех $(t, x, y)\in R\times D\times D_1$, где $|f|=(|f_1|, |f_2|, \dots, |f_n|)$, $|x|=(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$, $|y|=(|y_1|, |y_2|, \dots, |y_s|)$, $\mathbf{M}=(M_1, M_2, \dots, M_n)$, $M_j\geqslant 0$, $j=1, \dots, n$, $K=\{k_{ij}\}$ — $(n\times n)$-мерная матрица с неотрицательными элементами $k_{ij}\geqslant 0$, $i, j=1, 2, \dots, n$; $Q=\{q_{ij}\}$ — $(n\times s)$-

мерная матрица с неотрицательными элементами $q_{ij} \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$ $j = 1, \ldots s$.

Относительно оператора $A = (A_1, A_2, \ldots, A_j, \ldots, A_s)$ будем предполагать, что его координата A_j, $j = 1, \ldots, s$, определена на классе непрерывных на (a_j, b_j) функций и переводит его в класс непрерывных на (c_j, d_j) функций. Далее, оператор A любую непрерывную периодическую по t с периодом ω функцию $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ переводит в непрерывную периодическую по t с периодом ω функцию $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_s(t))$ конечного или бесконечного числа координат. Кроме того, $Ax(t) \in D_1$ для каждой непрерывной периодической с периодом ω функции $x(t)$, принимающей значения в области D_1, и

$$|Ax_1(t) - Ax_2(t)|_0 \leqslant R\,|x_1(t) - x_2(t)|_0 \qquad (13.5)$$

для любой пары $x_1(t)$, $x_2(t)$ функций, где $R = \{r_{ij}\}$ — $(s \times n)$-мерная матрица с неотрицательными элементами $r_{ij} \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, s$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Относительно вектора $\mathbf{M}$ и матриц K, Q, R будем предполагать, что выполнены следующие условия:

1) множество $D - \mathbf{M}\omega/2$ не пусто;

2) наибольшее собственное число λ матрицы $P = (K + QR)\omega/2$ меньше единицы.

Теорема 1.21 [29]. *Пусть уравнение (13.1) удовлетворяет условиям 1, 2 и имеет периодическое решение $x = x(t)$ с периодом ω, принимающее при $t = 0$ значение $x(0) = x_0 \in D - \mathbf{M}\omega/2$. Тогда*

$$x(t) = \lim_{m \to \infty} x_m(t, x_0), \qquad (13.6)$$

$$|x(t) - x_m(t, x_0)| \leqslant P^m (E - P)^{-1} \mathbf{M}\omega/2, \qquad (13.7)$$

где $x_m(t, x_0)$ — периодические по t с периодом ω функции, определяемые соотношением

$$x_m(t, x_0) = x_0 + \int_0^t [f(t, x_{m-1}(t, x_0), Ax_{m-1}(t, x_0)) - \overline{f(t, x_{m-1}(t, x_0), Ax_{m-1}(t, x_0))}]\,dt \qquad (13.8)$$

$$\left(\overline{f(t, x_j(t), Ax_j(t))} = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega f(t, x_j(t), Ax_j(t))\,dt\right).$$

Доказательство. Докажем прежде всего, что рекуррентное соотношение (13.8) определяет функции $x_m(t, x_0)$ для любого $m \geqslant 1$ и каждая из этих функций принимает значения в области D. Действительно, оператор A определен для $x_0 \in D - \mathbf{M}\omega/2$, а значит, определена функция $f(t, x_0, Ax_0)$ и для нее верна оценка $|f(t, x_0, Ax_0)| \leqslant \mathbf{M}$. Согласно лемме 1.1 для разности $x_1(t, x_0) - x_0$ справедлива оценка

$$|x_1(t, x_0) - x_0| \leqslant |f(t, x_0, Ax_0)|_0\, \alpha_1(t) \leqslant \mathbf{M}\omega/2,$$

откуда следует, что $|x_1(t, x_0)-x_0|\leqslant \mathbf{M}\omega/2$, а значит, функция $x_1(t, x_0)$ принимает значения в области D, является непрерывной периодической по t с периодом ω. Методом математической индукции легко доказать, что рекуррентное соотношение (13.8) определяет непрерывные периодические по t с периодом ω функции $x_m(t, x_0)$ для любого $m\geqslant 1$ и значения этих функций принадлежат области D.

Докажем сходимость последовательности (13.8). Находим оценку

$$|x_{m+1}(t, x_0)-x_m(t, x_0)| = \Big|\int_0^t [f(t, x_m(t, x_0), Ax_m(t, x_0)) - \overline{f(t, x_m(t, x_0), Ax_m(t, x_0))}]\,dt -$$

$$-\int_0^t [f(t, x_{m-1}(t, x_0), Ax_{m-1}(t, x_0)) - \overline{f(t, x_{m-1}(t, x_0), Ax_{m-1}(t, x_0))}]\,dt\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \left(1-\frac{t}{\omega}\right)\int_0^t |f(t, x_m(t, x_0), Ax_m(t, x_0)) - f(t, x_{m-1}(t, x_0), Ax_{m-1}(t, x_0))|\,dt + \frac{t}{\omega}\int_0^\omega |f(t, x_m(t, x_0), Ax_m(t, x_0)) - f(t, x_{m-1}(t, x_0), Ax_{m-1}(t, x_0))|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(1-\frac{t}{\omega}\right)\int_0^t (K+QR)\,|x_m(t, x_0)-x_{m-1}(t, x_0)|_0\,dt + \frac{t}{\omega}\int_t^\omega (K+QR)\,|x_m(t, x_0)-x_{m-1}(t, x_0)|_0\,dt \leqslant$$

$$\leqslant (K+QR)\,|x_m(t, x_0)-x_{m-1}(t, x_0)|_0\,\alpha_1(t) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(K+QR)\,\omega}{2}\,|x_m(t, x_0)-x_{m-1}(t, x_0)|_0 \leqslant P\,|x_m(t, x_0)-x_{m-1}(t, x_0)|, \tag{13.9}$$

откуда

$$|x_{m+1}(t, x_0)-x_m(t, x_0)|_0 \leqslant P^m\,|x_1(t, x_0)-x_0|_0 \leqslant P^m \mathbf{M}\omega/2. \tag{13.10}$$

С учетом условия 2 из неравенства (13.10) следует равномерная сходимость последовательности функций (13.8) к некоторой непрерывной периодической по t с периодом ω функции $x_\infty(t, x_0)$. Переходя в (13.8) к пределу при $m\to\infty$, убеждаемся, что предельная функция $x_\infty(t, x_0)$ является перодическим с периодом ω решением интегрального уравнения

$$x_\infty(t) = x_0 + \int_0^t [f(t, x_\infty(t), Ax_\infty(t)) - \overline{f(t, x_\infty(t), Ax_\infty(t))}]\,dt. \tag{13.11}$$

Поскольку $x(t)$ — периодическое решение уравнения (13.1), то

$$\overline{f(t, x(t), Ax(t))} = 0; \tag{13.12}$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(t, x(t), Ax(t))\,dt. \tag{13.13}$$

Из этих соотношений следует, что $x(t)$, как и $x_\infty(t, x_0)$, является решением одного и того же уравнения (13.11). Поэтому, чтобы доказать соотношение (13.6), остается показать, что уравнение (13.11) имеет единственное периодическое решение. Допустим противное, т. е. что кроме периодического решения $x=x(t)$ уравнение (13.11) имеет решение $x_1=x_1(t)$, принимающее значения в D и удовлетворяющее тем же начальным условиям. Тогда для разности $x(t)-x_1(t)$ получаем оценку

$$|x(t)-x_1(t)|_0=\Big|\int^t\{[f(t, x(t), Ax(t))-\overline{f(t, x(t), Ax(t))}]-$$

$$-[f(t, x_1(t), Ax_1(t))-\overline{f(t, x_1(t), Ax_1(t))}]\}\,dt\Big|_0\leqslant$$

$$\leqslant P|x(t)-x_1(t)|_0, \tag{13.14}$$

из которой в силу условия 2 следуют соотношения $|x(t)-x_1(t)|_0\leqslant 0$, $x(t)=x_1(t)$, противоречащие сделанному предположению.

Существование периодического решения системы (13.1) устанавливает теорема, аналогичная теореме 1.2.

Замечание. Предположим, что в уравнении (13.1) x — скалярная величина, а оператор A является оператором сдвига:

$$Ax(t)=(x(t-\Delta_1), x(t-\Delta_2), \ldots), \tag{13.15}$$

где $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_j, \ldots$ — числовая последовательность. Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение с бесконечным числом запаздываний

$$\frac{dx(t)}{dt}=f(t, x(t), x(t-\Delta_1), x(t-\Delta_2), \ldots), \tag{13.16}$$

где $f(t, x, y_1, y_2, \ldots, y_s, \ldots)$ — периодическая по t с периодом ω функция, непрерывно дифференцируемая по $x, y_1, y_2, \ldots, y_s, \ldots$ в области

$$|x|\leqslant d, \quad |y_j|\leqslant d, \qquad j=1, 2, \ldots, \tag{13.17}$$

причем выполняются неравенства

$$|f(t, x, y_1, \ldots, y_s, \ldots)|\leqslant \mathrm{M}, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\leqslant k, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y_j}\right|\leqslant q_j, \qquad j=1, 2, \ldots \tag{13.18}$$

В этом случае постоянные K, Q, R определяются соотношениями

$$K=k, \; Q=(q_1, q_2, \ldots, q_j, \ldots), \qquad R=(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$$

и условия 1, 2 принимают вид

$$\mathrm{M}\omega/2<d, \; P=\omega/2\Big(k+\sum_{j=1}^{\infty} q_j\Big)<1.$$

Тогда для дифференциального уравнения с бесконечным числом запаздываний можно доказать утверждения, аналогичные теоремам 1.1, 1.2.

Глава II

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ МЕТОДОМ БУБНОВА — ГАЛЕРКИНА

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t-\Delta)), \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — n-мерный вектор; $f(t, x, y) = (f_1(t, x, y), f_2(t, x, y), \ldots, f_n(t, x, y))$ — периодическая по t с периодом 2π n-мерная вектор-функция; Δ — постоянная величина. В дальнейшем через $C^r(\mathfrak{T}_1 \times D \times D)$ будем обозначать пространство r раз непрерывно дифференцируемых относительно $(t, x, y) \in \mathfrak{T}_1 \times D \times D$ функций $f(t, x, y)$, периодических по t с периодом 2π, где $\mathfrak{T}_1 = [0, 2\pi]$, D — некоторая ограниченная выпуклая область евклидова пространства E_n. Для элементов этого пространства введем дифференциальную норму $|\cdot|_r$:

$$|f|_r = \max_{0 \leqslant \nu \leqslant r} |D^\nu f|_0, \quad |f|_0 = \max_{\mathfrak{T}_1 \times D \times D} \| f(t, x, y) \|$$

и интегральную норму $\|\cdot\|_0$:

$$\| f \|_0 = \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \| f \|^2 \, dt \right]^{1/2},$$

где $D^\nu f$ — любая частная производная по t, x, y порядка ν функции $f(t, x, y)$; $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора.

Пусть $f(t)$ — непрерывная периодическая вектор-функция с периодом 2π и соответствующий ей ряд Фурье имеет вид

$$g(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nt + d_n \sin nt). \tag{1.2}$$

Сбозначим

$$S_m g(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (c_n \cos nt + d_n \sin nt),$$

$$R_m g(t) = \sum_{n=m+1}^{\infty} (c_n \cos nt + d_n \sin nt).$$

Приближенное периодическое решение системы (1.1) будем искать в виде тригонометрического полинома

$$x_m(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \tag{1.3}$$

коэффициенты которого находятся из системы алгебраических уравнений

$$\frac{dx_m(t)}{dt} = S_m f(t, x_m(t), x_m(t-\Delta)). \tag{1.4}$$

Тригонометрический полином $x_m(t)$, удовлетворяющий системе (1.4), называется приближением Бубнова — Галеркина порядка m. Систему уравнений (1.4) можно записать в виде

$$F^{(m)}(\alpha) = 0, \tag{1.5}$$

где α—$(2m+1)$-мерный вектор коэффициентов полинома $x_m(t)$: $\alpha = (a_0/2, a_1, b_1, \dots, a_m, b_m)$. Уравнения (1.5) будем называть определяющими уравнениями приближений Бубнова — Галеркина. Очевидно, что выполняется соотношение $\|x_m\|_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\|\alpha\|$, поскольку

$$\| x_m(t) \|_0^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \| x_m(t) \|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_k \Big[\frac{a_{0k}}{2} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{m} (a_{nk}\cos nt + b_{nk}\sin nt)\Big]^2 dt = \sum_k \Big[\frac{a_{0k}^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m} (a_{nk}^2 + b_{nk}^2)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{\| a_0 \|^2}{2} + \sum_{n=1}^{m} (\| a_n \|^2 + \| b_n \|^2)\Big] = \frac{1}{2}\| \alpha \|^2.$$

Докажем теорему, устанавливающую критерий разрешимости системы уравнений (1.5) [132].

Теорема 2.1. *Пусть действительная система уравнений*

$$F(\alpha) = 0, \tag{1.6}$$

где α *и* $F(\alpha)$ *— векторы одинаковой размерности и* $F(\alpha)$ *— непрерывно дифференцируемая функция* α*, определенная в некоторой области* Ω*, имеет приближенное решение* $\alpha = \hat{\alpha}$*, для которого определитель матрицы Якоби* $J(\alpha)$ *для* $F(\alpha)$ *по отношению к* α *не обращается в нуль при* $\alpha = \hat{\alpha}$*. Пусть также существуют положительная постоянная* δ *и неотрицательная постоянная* $\varkappa < 1$*, такие, что:*

а) $\Omega_\delta = \{\alpha \mid \|\alpha - \hat{\alpha}\| \leqslant \delta\} \subset D$;

б) $\| J(\alpha) - J(\hat{\alpha}) \| \leqslant \varkappa/M'$ *для любого* $\alpha \in \Omega_\delta$; (1.7)

в) $M'l/(1-\varkappa) \leqslant \delta$,

где l и M' — положительные числа, для которых выполняются неравенства

$$\|F(\hat{\alpha})\| \leqslant l, \quad \|J^{-1}(\hat{\alpha})\| \leqslant M'. \tag{1.8}$$

Тогда система (1.6) имеет единственное решение $\alpha = \bar{\alpha}'$ в области Ω_δ и

$$\|\bar{\alpha} - \hat{\alpha}\| = M'l/(1-\varkappa). \tag{1.9}$$

Доказательство. Пусть $J_m(\hat{\alpha}) = \left.\frac{\partial F^{(m)}}{\partial a}\right|_{\alpha=\hat{\alpha}}$. Положим $A = J^{-1}(\hat{\alpha})$ и рассмотрим итеративный процесс

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - AF(\alpha_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.10}$$

где $\alpha_0 = \hat{\alpha}$. Покажем сначала, что приближения α_k существуют для любого k и $\alpha_k \in \Omega_\delta$. Полагая $k = 0$, из уравнения (1.10) получаем неравенство

$$\|\alpha_1 - \alpha_0\| = \|AF(\hat{\alpha})\| \leqslant M'l \leqslant (1-\varkappa)\,\delta < \delta, \tag{1.11}$$

а значит, $\alpha_1 \in \Omega_\delta$. Оценивая разность $\alpha_2 - \alpha_1$, находим

$$\alpha_2 - \alpha_1 = (\alpha_1 - \alpha_0) - A\,[F(\alpha_1) - F(\alpha_0)] =$$

$$= A \int_0^1 \{J(\alpha_0) - J\,[\alpha_0 + \theta(\alpha_1 - \alpha_0)]\}(\alpha_1 - \alpha_0)\,d\theta, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 1, \tag{1.12}$$

поскольку $\alpha_0 + \theta(\alpha_1 - \alpha_0) \in \Omega_\delta$ и α_1, $\alpha_0 \in \Omega_\delta$. Тогда из соотношения (1.12) с учетом условий (1.7) получаем оценку

$$\|\alpha_2 - \alpha_1\| \leqslant M'\frac{\varkappa}{M'}\|\alpha_1 - \alpha_0\| \leqslant \varkappa\|\alpha_1 - \alpha_0\|. \tag{1.13}$$

Методом полной математической индукции легко доказать, что для любого k справедливо неравенство

$$\|\alpha_{k+1} - \alpha_k\| \leqslant \varkappa^k \|\alpha_1 - \alpha_0\|. \tag{1.14}$$

Кроме того, так как $\|\alpha_{k+1} - \alpha_0\| = \|\alpha_{k+1} - \alpha_k\| + \ldots + \|\alpha_1 - \alpha_0\|$, то из неравенств (1.11) и (1.13) получаем

$$\|\alpha_{k+1} - \alpha_0\| \leqslant M'l/(1-\varkappa) \leqslant \delta, \tag{1.15}$$

откуда следует, что для любого k $\alpha_{k+1} \in \Omega_\delta$.

Из оценок (1.14), (1.15) следует также, что итерационный процесс можно продолжать неограниченно и получить бесконечную последовательность $\{\alpha_k\}$, сходящуюся в силу соотношения (1.14) и неравенства $\varkappa < 1$. Очевидно, что $\bar{\alpha}$ является решением уравнения (1.6) и неравенство (1.9) следует из неравенства (1.15). Единственность $\bar{\alpha}$ легко доказать методом от противного, предположив, что существует другое решение $\bar{\alpha}' \in \Omega_\delta$.

Действительно, так как $\bar{\alpha}$ и $\bar{\alpha}'$ удовлетворяют соотношениям

$$\bar{\alpha} = \alpha - AF(\bar{\alpha}), \quad \bar{\alpha} = \bar{\alpha}' - AF(\bar{\alpha}'),$$

то, как и в оценке (1.12), справедливо соотношение

$$\| \bar{\alpha} - \bar{\alpha}' \| = \varkappa \| \bar{\alpha} - \bar{\alpha}' \|,$$

из которого следует тождество $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}'$, поскольку $0 \leqslant \varkappa < 1$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t), \tag{1.16}$$

где $f(t)$ — периодическая с периодом 2π функция, непрерывная и разлагающаяся в ряд Фурье

$$f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nt + d_n \sin nt).$$

Очевидно, что периодическое решение уравнения (1.16) будет существовать, если $c_0 = 0$. Оценим разность $x(t) - S_m x(t)$ между точным и приближенным решением уравнения (1.16).

Лемма 2.1 [132]. *Для периодического решения уравнения (1.16) имеют место оценки*

$$| x(t) - x_m(t) |_0 \leqslant \sigma(m) \| f \|_0 \leqslant \sigma(m) | f |_0; \tag{1.17}$$

$$\| x(t) - x_m(t) \|_0 \leqslant \sigma_1(m) \| f \|_0, \tag{1.18}$$

где

$$\sigma(m) = \sqrt{2} \left[\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \dots \right]^{1/2}; \tag{1.19}$$

$$\sigma_1(m) = \frac{1}{m+1}, \tag{1.20}$$

причем

$$\frac{\sqrt{2}}{m+1} < \sigma(m) < \frac{\sqrt{2}}{m}. \tag{1.21}$$

Доказательство. Согласно разложению функции $f(t)$ в ряд Фурье получаем соотношение

$$x(t) - x_m(t) = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n} (-d_n \cos nt + c_n \sin nt), \tag{1.22}$$

из которого, применяя неравенство Шварца, находим

$$\| x(t) - x_m(t) \|^2 = \left\| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n} (-d_n \cos nt + c_n \sin nt) \right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{n=m+1}^{\infty} (\| -d_n \cos nt + c_n \sin nt \|)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{n=m+1}^{\infty} (\| d_n \|^2 + \| c_n \|^2) = \sigma^2(m) \sum_{n=m+1}^{\infty} (\| d_n \|^2 + \| c_n \|^2). \tag{1.23}$$

Воспользуемся неравенством Бесселя

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} (\| c_n \|^2 + \| d_n \|^2) \leqslant \| f \|_0^2. \tag{1.24}$$

Объединяя неравенства (1.23) и (1.24), получаем

$$| x(t) - x_m(t) |_0 \leqslant \sigma(m) \| f \|_0 \leqslant \sigma(m) | f |_0,$$

т. е. оценку (1.17). Далее, применяя к соотношению (1.22) формулу Парсеваля, находим

$$\| x(t) - x_m(t) \|_0^2 =$$

$$= \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\| c_n \|^2 + \| d_n \|^2) \leqslant \frac{1}{(m+1)^2} \sum_{n=m+1}^{\infty} (\| c_n \|^2 + \| d_n \|^2).$$

Отсюда получаем неравенство (1.18):

$$\| x(t) - x_m(t) \|_0 \leqslant \frac{1}{m+1} \| f \|_0.$$

§ 2. ФУНКЦИЯ ГРИНА ЗАДАЧИ О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ЕЕ СВОЙСТВА

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dz(t)}{dt} = A(t) z(t) + B(t) z(t - \Delta) + c(t), \tag{2.1}$$

где z — n-мерный вектор; $c(t)$ — n-мерная вектор-функция; $A(t)$, $B(t)$ — $(n \times n)$-мерные квадратные матрицы $A(t)$, $B(t)$; $c(t) \in C^0(\mathfrak{T}_1)$.

Матричную функцию $G_0(t, \tau)$ будем называть функцией Грина, если при $t \neq \tau$ она определена, непрерывна по переменным t и τ, удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{dz(t)}{dt} = A(t) z(t) + B(t) z(t - \Delta),$$

условию

$$G_0(t, \tau)\big|_{t=\tau+0} - G_0(t, \tau)\big|_{t=\tau-0} = E \tag{2.2}$$

и неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} \| G_0(t, \tau) \| \, dt \leqslant M^0 < +\infty, \qquad t, \tau \in R, \ t \neq \tau;$$

здесь E — единичная матрица, $R = (-\infty, \infty)$, M^0 — положительная постоянная.

Предположим, что система уравнений (2.1) имеет функцию Грина $G_0(t, \tau)$, удовлетворяющую условию

$$\| G_0(t, \tau) \| \leqslant M_0 e^{-\lambda_0 |t - \tau|}, \qquad t, \tau \in R, \ t \neq \tau, \tag{2.3}$$

где λ_0, M_0 — положительные постоянные. Тогда система уравнений (2.1) имеет единственное периодическое с периодом 2π решение $z=z(t)$, которое можно записать в виде

$$z(t)=\int_{-\infty}^{\infty} G_0(t,\tau)\,c(\tau)\,d\tau. \tag{2.4}$$

Свойства функции Грина $G_0(t, \tau)$ позволяют установить следующие утверждения [124].

Лемма 2.2. *Если система дифференциальных уравнений (2.1) имеет функцию Грина $G_0(t, \tau)$, удовлетворяющую условию (2.3), то периодическое решение (2.4) этой системы удовлетворяет неравенству*

$$\|z\|_0\leqslant\frac{2M_0}{\lambda_0}\|c\|_0. \tag{2.5}$$

Доказательство. По определению нормы $\|\cdot\|$ имеем

$$\|z\|_0^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big\|\int_{-\infty}^{\infty} G_0(t,\tau)\,c(\tau)\,d\tau\Big\|^2 dt, \tag{2.6}$$

откуда, применяя к правой части неравенство Буняковского — Шварца, получаем

$$\|z\|_0^2\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\|G_0(t,\tau)\|\,d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\|G_0(t,\tau)\|\,\|c(\tau)\|^2 d\tau\Big]dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M_0^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda_0|t-\tau|}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda_0|t-\tau|}\|c(\tau)\|^2 d\tau\Big]dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M_0^2}{\pi\lambda_0}\int_0^{2\pi}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda_0|t-\tau|}\|c(\tau)\|^2 d\tau\Big]dt.$$

С помощью замены $\tau-t=\theta$ последнее неравенство можно привести к виду

$$\|z\|_0^2\leqslant\frac{M_0^2}{\pi\lambda_0}\int_0^{2\pi}dt\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda_0|\theta|}\|c(t+\theta)\|^2 d\theta;$$

отсюда, меняя по теореме Фубини [33] порядок интегрирования, получаем

$$\|z\|_0^2\leqslant\frac{M_0^2}{\pi\lambda_0}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda_0|\theta|}\int_0^{2\pi}\|c(t+\theta)\|^2 dt\,d\theta.$$

Но для $c(t)\in C^0(\mathfrak{T}_1)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|c(t+\theta)\|^2 dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi+\theta}\|c(s)\|^2 ds=\|c\|_0^2,$$

поэтому

$$\|z\|_0^2 \leqslant \frac{2M_0^2}{\lambda_0}\|c\|_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_0(\theta)}d\theta = \frac{4M_0^2}{\lambda_0^2}\|c\|_0^2,$$

откуда непосредственно следует утверждение леммы — неравенство (2.5).

Лемма 2.3. *Если линейная система дифференциальных уравнений (2.1) имеет функцию Грина $G_0(t, \tau)$, удовлетворяющую условию (2.3), то возмущенная линейная система*

$$\frac{dz(t)}{dt} = [A(t) + A_0(t)]z(t) + [B(t) + B_0(t)] + c(t) \tag{2.7}$$

при условии, что матрицы $A_0(t) \in C^0(\mathfrak{T}_1)$, $B_0(t) \in C^0(\mathfrak{T}_1)$ настолько малы, что для $0 < \lambda < \lambda_0$ выполняется неравенство

$$\frac{2M_0}{\lambda_0 - \lambda}[|A_0|_0 + |B_0|_0 e^{\lambda\Delta}] \leqslant \rho < 1, \tag{2.8}$$

имеет функцию Грина $G(t, \tau)$, удовлетворяющую неравенству

$$\|G(t, \tau)\| \leqslant Me^{-\lambda|t-\tau|}, \qquad t, \tau \in R, \ t \neq \tau, \tag{2.9}$$

где

$$M = M_0\left\{1 + \frac{M_0}{(1-\rho)\lambda_0}[|A_0|_0 + |B_0|_0 e^{\lambda\Delta}] \sup_{t \geqslant 0}[(1 + \lambda_0 t)e^{-(\lambda_0 - \lambda)t}]\right\}.$$

Доказательство. Представив функцию Грина $G(t, \tau)$ возмущенной системы уравнений (2.7) в виде

$$G(t, \tau) = G_0(t, \tau) + Z(t, \tau) \tag{2.10}$$

и подставив выражение (2.10) в систему уравнений (2.7), убеждаемся, что матрица $Z(t, \tau)$ является непрерывным по t, τ решением матричного уравнения

$$\frac{dZ(t, \tau)}{dt} = A(t)Z(t, \tau) + B(t)Z(t - \Delta, \tau) + A_0(t)G_0(t, \tau) +$$
$$+ B_0(t)G_0(t - \Delta, \tau) + A_0(t)Z(t, \tau) + B_0(t)Z(t - \Delta, \tau), \tag{2.11}$$

удовлетворяющим неравенству

$$\|Z(t, \tau)\| \leqslant M_0' e^{-\lambda(t-\tau)}, \qquad t, \tau \in R, \ t \neq \tau. \tag{2.12}$$

С учетом свойств матрицы $G_0(t, \tau)$ в качестве $Z(t, \tau)$ можно принять решение интегрального уравнения

$$Z(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(t, s)[A_0(s)Z(s, \tau) + B_0(s)Z(s - \Delta, \tau)]ds + \Phi(t, \tau), \tag{2.13}$$

где

$$\Phi(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(t, s)[A_0(s)G_0(s, \tau) + B_0(s)G_0(s - \Delta, \tau)]ds. \tag{2.14}$$

В силу неравенства (2.3) и ограниченности матриц $A_0(t)$ и $B_0(t)$ интеграл, определяющий $\Phi(t, \tau)$, равномерно сходится и матрица $\Phi(t, \tau)$ допускает оценку

$$\| \Phi(t, \tau) \| \leqslant M_0'' e^{-\lambda|t-\tau|},$$

где

$$M_0'' = \frac{M_0}{\lambda_0} [| A_0 |_0 + | B_0 |_0 e^{\lambda\Delta}] \sup_{t \geqslant 0} [(1 + \lambda_0 t) e^{-(\lambda_0 - \lambda)t}], \qquad 0 < \lambda < \lambda_0.$$

Положив $W(t, \tau) = e^{\lambda(t-\tau)} Z(t, \tau)$, для матрицы $W(t, \tau)$ получим следующее интегральное уравнение:

$$W(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(t, s) [e^{\lambda(|t-\tau|-|s-\tau|)} A_0(s) W(s, \tau) +$$

$$+ e^{\lambda(|t-\tau|-|s-\tau-\Delta|)} B_0(s) W(s - \Delta, \tau)] ds + \Phi(t, \tau) e^{\lambda|t-\tau|}. \qquad (2.15)$$

Используя принцип сжатых отображений, легко показать, что уравнение (2.15) имеет непрерывное по t и τ решение, если выполняется неравенство

$$\frac{2M_0}{\lambda_0 - \lambda} [| A_0 |_0 + | B_0 |_0 e^{\lambda\Delta}] \leqslant \rho < 1. \qquad (2.16)$$

Таким образом, если положить $M_0' = \frac{1}{1-\rho} M_0''$, то матрица $Z(t, \tau) = W(t, \tau) e^{-\lambda(t-\tau)}$ будет непрерывным решением уравнения (2.13), удовлетворяющим неравенству (2.12).

§ 3. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА МАТРИЦЫ ЯКОБИ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ ПРИБЛИЖЕНИЙ ГАЛЕРКИНА

Пусть $\hat{x}(t)$ — очное периодическое решение системы (1.1). Запишем его разложение в ряд Фурье:

$$\hat{x}(t) = \frac{\hat{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{a}_n \cos nt + \hat{b}_n \sin nt).$$

Приближением Бубнова — Галеркина порядка m к этому решению будет

$$\hat{x}_m(t) = \frac{\hat{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (\hat{a}_n \cos nt + \hat{b}_n \sin nt),$$

где $\left(\frac{\hat{a}_0}{2}, \hat{a}_1, \hat{b}_1, \dots, \hat{a}_n, \hat{b}_n\right) = \hat{\alpha}$ определяются из системы определяющих уравнений

$$F^{(m)}(\hat{\alpha}) = 0. \qquad (3.1)$$

Пусть $J_m(\hat{\alpha}) = \left.\frac{\partial F^{(m)}(\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\hat{\alpha}}$ — матрица Якоби левой части системы определяющих уравнений. Изучим некоторые свойства этой матрицы, необходимые для доказательства приближений Бубнова — Галеркина. Для этого рассмотрим вспомогательную линейную систему

$$J_m(\hat{\alpha})\xi + \gamma = 0, \tag{3.2}$$

где

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{\hat{a}_0}{2}, \hat{a}_1, \hat{b}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{b}_m\right),$$

$$\gamma = \left(\frac{c_0}{2}, c_1, d_1, \dots, c_m, d_m\right),$$

$$\xi = \left(\frac{v_0}{2}, v_1, w_1, \dots, v_m, w_m\right).$$

Если положить

$$z_m(t) = \frac{v_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (v_n \cos nt + w_n \sin nt); \tag{3.3}$$

$$\varphi_m(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (c_n \cos nt + d_n \sin nt), \tag{3.4}$$

то с учетом вида $J_m(\hat{\alpha})$ из соотношений (3.2) — (3.4) следует, что $z_m(t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_m(t)}{dt} = S_m\left[\frac{\partial \hat{f}_m}{\partial x} z_m(t)\right] + S_m\left[\frac{\partial \hat{f}_m}{\partial y} z_m(t-\Delta)\right] + \varphi_m(t), \tag{3.5}$$

где

$$\hat{f}_m = f(t, \hat{x}_m(t), \hat{x}_m(t-\Delta)).$$

Лемма 2.4 [51]. *Пусть правая часть системы уравнений* (1.1) *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $f(t, x, y) \in C^{\cdot}(\mathfrak{T}_1 \times D \times D)$;

2) существует периодическое с периодом 2π *решение* $x = \hat{x}(t)$ *этой системы, принадлежащее области* D *с некоторой окрестностью* δ_0;

3) соответствующая этому решению система уравнений в вариациях

$$\frac{dz(t)}{dt} = A(t)z(t) + B(t)z(t-\Delta), \tag{3.6}$$

где

$$A(t) = \frac{\partial f(t, \hat{x}(t), \hat{x}(t-\Delta))}{\partial x}, \quad B(t) = \frac{\partial f(t, \hat{x}(t), \hat{x}(t-\Delta))}{\partial y},$$

имеет функцию Грина $G_0(t, \tau)$, удовлетворяющую условию (2.3). Тогда для фиксированного λ, $0<\lambda<\lambda_0$, найдется такое достаточно большое число m_0, что для любого $m \geqslant m_0$ существуют $J_m^{-1}(\alpha)$, удовлетворяющие неравенству

$$\| J_m^{-1}(\hat{\alpha}) \| \leqslant M', \tag{3.7}$$

где M' — положительная постоянная, не зависящая от m.

Доказательство. Представив систему (3.5) в виде

$$\frac{dz_m(t)}{dt} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x} z_m(t) - \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{f}_m}{\partial x}\right) z_m(t) + \frac{\partial \hat{f}}{\partial y} z_m(t-\Delta) -$$

$$-\left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{f}_m}{\partial y}\right) z_m(t-\Delta) - R_m\left[\frac{\partial \hat{f}_m}{\partial x} z_m(t)\right] -$$

$$- R_m\left[\frac{\partial \hat{f}_m}{\partial y} z_m(t-\Delta)\right] + \varphi_m(t), \tag{3.8}$$

с учетом неравенства (1.16) находим оценки

$$\left|\frac{\partial \hat{f}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{f}_m}{\partial x}\right|_0 \leqslant |f|_2 |\hat{x} - \hat{x}_m|_0 \leqslant |f|_2 |f|_0 \sigma(m),$$

$$\left|\frac{\partial \hat{f}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{f}_m}{\partial y}\right|_0 \leqslant |f|_2 |f|_0 \sigma(m). \tag{3.9}$$

Но из (3.8) следует, что $z_m(t)$ является периодическим решением системы вида (2.7), если положить

$$A_0(t) = -\left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{f}_m}{\partial x}\right), \quad B_0(t) = -\left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{f}_m}{\partial y}\right)$$

и считать выражения с R_m известными функциями. Поэтому, выбирая m_0 достаточно большим, чтобы при $m \geqslant m_0$ выполнялось неравенство

$$\frac{2M_0}{\lambda_0 - \lambda}(1 + e^{\lambda\Delta}) |f|_2 |f|_0 \sigma(m) < 1, \tag{3.10}$$

к системе (3.8) можно применить лемму 2.3, согласно которой эта система имеет функцию Грина $G_m(t, \tau)$, удовлетворяющую неравенству

$$\| G_m(t, \tau) \| \leqslant M^{-\lambda|t-\tau|}, \qquad t, \tau \in R, \ t \neq \tau; \tag{3.11}$$

при этом периодическое решение $z = z_m(t)$ системы уравнений (3.8) можно записать в виде

$$z_m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_m(t, \tau)\Big\{\varphi_m(s) - R_m\left[\frac{\partial \hat{f}_m}{\partial x} z_m(s)\right] -$$

$$- R_m\left[\frac{\partial \hat{f}_m}{\partial y} z_m(s-\Delta)\right]\Big\} ds. \tag{3.12}$$

Покажем теперь, что оператор T_m, определяемый правой частью (3.12) и заданный на классе функций вида (3.3), переводит этот класс функций в себя. Дифференцируя (3.12), с учетом вида функции $G_m(t, \tau)$ получаем

$$\frac{dz_m(t)}{dt} \equiv \varphi_m(t) + S_m\left[\frac{\partial \hat{f}_m}{\partial x} z_m(t)\right] + S_m\left[\frac{\partial \hat{f}_m}{\partial y} z_m(t-\Delta)\right], \quad (3.13)$$

откуда следует, что $\frac{dz_m(t)}{dt}$, а значит, и $z_m(t)$ будут тригонометрическими полиномами порядка m.

Оценивая (3.13) с помощью (1.16) и (1.17), получаем неравенства

$$\begin{aligned} &\left\| R_m\left[\frac{\partial \hat{f}_m}{\partial x} z_m(t)\right]\right\|_0 \leqslant L_3\sigma_1(m)\,\| z_m(t)\|_0, \\ &\left\| R_m\left[\frac{\partial \hat{f}_m}{\partial y} z_m(t-\Delta)\right]\right\|_0 \leqslant L_4\sigma_1(m)\,\| z_m(t)\|_0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

используя которые с учетом (3.12) находим

$$\| z_m(t)\|_0 \leqslant \frac{2M}{\lambda}\,\|\varphi_m\|_0 + \frac{2M}{\lambda}(L_3+L_4)\,\sigma_1(m)\,\| z_m(t)\|_0. \quad (3.15)$$

Из оценки (3.15) следует, что если выбрать m_0 настолько большим, чтобы при $m \geqslant m_0$ выполнялось неравенство

$$\rho_m = \frac{2M}{\lambda}(L_3+L_4)\,\sigma_1(m) < 1, \quad (3.16)$$

то оператор T_m^0, определяемый правой частью системы (3.12), при $\psi_m(t) \equiv 0$ удовлетворяет оценке

$$\| T_m^0 z_m\|_0 \leqslant \rho_m \| z_m(t)\|_0, \qquad \rho_m < 1. \quad (3.17)$$

Согласно принципу сжатых отображений уравнение (3.12) имеет единственное периодическое решение $z = z_m(t)$, удовлетворяющее неравенству

$$\| z_m\|_0 \leqslant M' \,\|\psi_m\|_0, \quad (3.18)$$

где

$$M' = \frac{2M\,[1 + |f|_1\,\sigma_1(m_0)]}{\lambda - 2M\,(L_3+L_4)\,\sigma_1(m_0)}, \qquad m \geqslant m_0. \quad (3.19)$$

Поскольку система (3.8) эквивалентна системе (3.2), то $\xi = -J_m^{-1}(\hat{\alpha})\gamma$, а так как $\frac{1}{\sqrt{2}}\|\xi\| = \| z_m\|_0$, $\|\psi_m\|_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\|\gamma\|$, то неравенство (3.18) эквивалентно неравенству

$$\|\xi\| \leqslant M' \|\gamma\|, \qquad m \geqslant m_0,$$

откуда следует соотношение (3.7), что и требовалось доказать.

Для оценки разности $J_m(\alpha) - J_m(\hat{\alpha})$ имеет место

Лемма 2.5. *Предположим, что правая часть системы уравнений* (1.1) *удовлетворяет условиям 1, 2 леммы 2.4. Пусть также для произвольного вектора* $\alpha = \left(\frac{a_0}{2}, a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m\right)$ *полином*

$$x_m(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

принадлежит области D при $t \in \mathfrak{T}_1$. Тогда для разности $J_m(\alpha) - J_m(\hat{\alpha})$ справедлива оценка

$$\| J_m(\alpha) - J_m(\hat{\alpha}) \| \leqslant 2 \, | f |_2 \, | x_m - \hat{x}_m |_0 \leqslant 2 \, | f |_2 \sqrt{m + \frac{1}{2}} \, \| \alpha - \hat{\alpha} \|. \tag{3.20}$$

Доказательство. Пусть $\xi = \left(\frac{v_0}{2}, v_1, w_1, \ldots, v_m, w_m\right)$ — произвольный вектор. Образуем соответствующий ему тригонометрический полином

$$z_m(t) = \frac{v_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (v_n \cos nt + w_n \sin nt). \tag{3.21}$$

Положим

$$\gamma' = -J_m(\alpha)\,\xi, \quad \gamma = -J_m(\hat{\alpha})\,\xi,$$

$$\gamma' = \left(\frac{c_0'}{2}, c_1', d_1', \ldots, c_m', d_m'\right), \quad \gamma = \left(\frac{c_0}{2}, c_1, d_1, \ldots, c_m, d_m\right)$$

и образуем соответствующие тригонометрические полиномы

$$\varphi_m'(t) = \frac{c_0'}{2} + \sum_{n=1}^{m} (c_n' \cos nt + d_n' \sin nt),$$

$$\varphi_m(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (c_n \cos nt + d_n \sin nt). \tag{3.22}$$

Из определения матриц $J_m(\alpha)$, $J_m(\hat{\alpha})$ из соотношений (3.21), (3.22) следует, что выполняются равенства

$$\frac{dz_m(t)}{dt} = S_m\left[\frac{\partial f_m}{\partial x} z_m(t)\right] + S_m\left[\frac{\partial f_m}{\partial y} z_m(t - \Delta)\right] + \varphi'(t);$$

$$\frac{dz_m(t)}{dt} = S_m\left[\frac{\partial \hat{f}_m}{\partial x} z_m(t)\right] + S_m\left[\frac{\partial \hat{f}_m}{\partial y} z_m(t - \Delta)\right] + \varphi(t), \tag{3.23}$$

где

$$f_m = f(t, x_m(t), x_m(t - \Delta)), \quad \hat{f}_m = f(t, \hat{x}_m(t), \hat{x}(t - \Delta)).$$

Отсюда

$$\|\varphi'(t)-\varphi(t)\|_0 \leqslant \left\|\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial \hat{f}}{\partial x}\right)z_m(t)\right\|_0 + \left\|\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial \hat{f}}{\partial y}\right)z_m(t-\Delta)\right\|_0 \leqslant$$

$$\leqslant 2|f|_2 |x_m-\hat{x}_m|_0 \|z_m(t)\|_0$$

и

$$\|\gamma'-\gamma\| \leqslant 2|f|_2|x_m-\hat{x}_m|_0\|z_m(t)\|_0. \qquad (3.24)$$

Но

$$\|\gamma'-\gamma\| = \|[J_m(\alpha)-J_m(\hat{\alpha})]\xi\| = \sqrt{2}\|\varphi_m'-\varphi_m\|_0,$$

$$\|\xi\| = \sqrt{2}\|z\|_0,$$

поэтому неравенство (3.24) эквивалентно неравенству

$$\|[J_m(\alpha)-J_m(\hat{\alpha})]\xi\| \leqslant 2|f|_2|x_m-\hat{x}_m|_0\|\xi\|,$$

из которого следует неравенство

$$\|J_m(\alpha)-J_m(\hat{\alpha})\| \leqslant 2|f|_2|x_m-\hat{x}_m|_0 \leqslant$$

$$\leqslant 2|f|_2\sqrt{2m+1}\|x_m-\hat{x}_m\|_0 = 2|f|_2\sqrt{m+\frac{1}{2}}\|\alpha-\hat{\alpha}\|,$$

что и требовалось доказать.

§ 4. СУЩЕСТВОВАНИЕ И СХОДИМОСТЬ ПРИБЛИЖЕНИЙ БУБНОВА — ГАЛЕРКИНА

В этом параграфе доказывается, что если система в вариациях, соответствующая точному периодическому решению $\hat{x}(t)$ системы уравнений (1.1) имеет функцию Грина, удовлетворяющую условию (2.3), то для всех достаточно больших m приближения Бубнова — Галеркина существуют и равномерно сходятся при $m\to\infty$ к точному периодическому решению $\hat{x}(t)$.

Теорема 2.2 [51, 124]. *Пусть правая часть системы дифференциальных уравнений (1.1) удовлетворяет условиям 1—3 леммы 2.4. Тогда всегда можно найти такое достаточно большое m_0, что при любом $m\geqslant m_0$ существуют приближения Бубнова — Галеркина $x=\bar{x}_m(t)$, равномерно сходящиеся при $m\to\infty$ к точному периодическому решению $x=\hat{x}(t)$, причем*

$$\|\bar{x}_m(t)-\hat{x}(t)\|_0 \leqslant M_1\frac{\sqrt{2m+1}}{m+1}+|f|_0\sigma(m), \qquad (4.1)$$

где M_1 — положительная постоянная, не зависящая от m.

Доказательство. Полагая $S_m\hat{x}(t)=\hat{x}_m(t)$, получаем равенство

$$\frac{d\hat{x}_m(t)}{dt} = S_m f(t,\hat{x}(t),\hat{x}(t-\Delta)) = S_m\hat{f}_m + S_m(\hat{f}-\hat{f}_m) =$$

$$= S_m\hat{f}_m + R_m(t). \qquad (4.2)$$

Предположим, что

$$\hat{x}(t) = \frac{\hat{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{a}_n \cos nt + \hat{b}_n \sin nt) \tag{4.3}$$

и

$$R_m(t) = \frac{r_0^{(m)}}{2} + \sum_{n=1}^{m} (r_n^{(m)} \cos nt + s_n^{(m)} \sin nt). \tag{4.4}$$

С учетом (4.3) и (4.4) равенство (4.2) будет эквивалентно следующей системе уравнений:

$$F_0^{(m)}(\hat{\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t, \hat{x}\ \ (t), \hat{x}_m(t-\Delta))\,dt = -\frac{r_0^{(m)}}{2},$$

$$F_n^{(m)}(\hat{\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t, \hat{x}_m(t), \hat{x}_m(t-\Delta)) \cos nt\,dt - n\hat{b}_n = -r_n^{(m)}, \tag{4.5}$$

$$G_n^{(m)}(\hat{\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t, \hat{x}_m(t), \hat{x}_m(t-\Delta)) \sin nt\,dt + n\hat{a}_n = -s_n^{(m)},$$

$$n = 1, 2, \ldots, m.$$

Эту систему для краткости запишем в виде

$$F^{(m)}(\hat{\alpha}) = -q^{(m)}, \tag{4.6}$$

где

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{\hat{a}_0}{2}, \hat{a}_1, \hat{b}_1, \ldots, \hat{a}_m, \hat{b}_m\right), \quad q^{(m)} = \left(\frac{r_0^{(m)}}{2}, r_1^{(m)}, s_1^{(m)}, \ldots, r_m^{(m)}, s_m^{(m)}\right).$$

Поскольку

$$\| S_m(\hat{f} - \hat{f}_m) \|_0 \leqslant 2 | f |_1 \| f \|_0 \sigma_1(m),$$

то из соотношения (4.6) следует неравенство

$$\| F^{(m)}(\hat{\alpha}) \| = \| q^{(m)} \| \leqslant 2\sqrt{2} | f |_1 \| f \|_0 \sigma_1(m) = l_m.$$

Примем $\hat{\alpha}$ за приближенное решение уравнения

$$F^{(m)}(\alpha) = 0. \tag{4.7}$$

Тогда согласно лемме 2.4 матрица Якоби $J_m(\alpha)$ при $\alpha = \hat{\alpha}$ имеет обратную матрицу $J_m^{-1}(\hat{\alpha})$, удовлетворяющую неравенству (3.7). Таким образом, для любого достаточно большого $m \geqslant m_0$, где $m_0 = m_0(l_m, M')$, будут выполняться неравенства

$$\| F^{(m)}(\hat{\alpha}) \| \leqslant l_m, \quad \| J_m^{-1}(\hat{\alpha}) \| \leqslant M^1. \tag{4.8}$$

Пусть для достаточно малого положительного числа δ_0 выполняется соотношение

$$u = \{x / \| x - \hat{x}(t) \| \leqslant \delta_0, t \in \mathfrak{T}_1\} \subset D.$$

Это возможно, поскольку $x = \hat{x}(t)$ по предположению принадлежит области D. Определим при $m \geqslant m_0$ и достаточно большом m_0 область

$$V_m = \{x / \| x - \hat{x}(t) \| \leqslant \delta_0 - |f|_0 \sigma(m), t \in \mathfrak{T}_1\}.$$

Тогда согласно (1.16) для любого $m \geqslant m_0$ выполняются соотношения

$$V_m \subset u \subset D.$$

Определим, далее, область Ω_m как множество точек $\alpha = \left(\frac{a_0}{2}, a_1, b_1, \ldots \right.$ $\left. \ldots, a_m, b_m\right)$, удовлетворяющих неравенству

$$\| \alpha - \hat{\alpha} \| \leqslant \frac{\delta_0 - |f|_0 \sigma(m)}{\sqrt{m + 1/2}},$$

и составим многочлен

$$x = x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

для $\alpha \in \Omega_{m_0}$. Тогда из неравенства

$$|x - \hat{x}|_0 \leqslant |x - \hat{x}_m|_0 + |\hat{x} - \hat{x}_m|_0 \leqslant \sqrt{m + 1/2} \, \| \alpha - \hat{\alpha} \| + \\ + |f|_0 \sigma(m) \leqslant \delta_0$$

следует, что $x = x(t) \in D$ для всех $t \in \mathfrak{T}_1$. Кроме того, согласно лемме 2.5 для всех $\alpha \in \Omega_m$ и $m \geqslant m_0$ выполняется неравенство

$$\| J_m(\alpha) - J_m(\hat{\alpha}) \| \leqslant 2 |f|_2 \sqrt{m + 1/2} \, \| \alpha - \hat{\alpha} \|. \tag{4.9}$$

Выберем произвольное число $\varkappa$, $0 < \varkappa < 1$, и положим

$$\min\left(\frac{\varkappa}{2 |f|_2 M'}, \delta_0 - |f|_0 \sigma(m_0)\right) = \delta_1. \tag{4.10}$$

Пусть $m_1 \geqslant m_0$ будет таким, чтобы для любого $m \geqslant m_1$ выполнялось неравенство

$$\frac{2\sqrt{2} M' |f|_1 \|f\|_0}{(1 - \varkappa)(m + 1)} < \frac{\delta_1}{\sqrt{2m + 1}}. \tag{4.11}$$

Это возможно, поскольку $\frac{\sqrt{2}(m+1)}{\sqrt{2m+1}} \to \infty$ при $m \to \infty$. Из соотношения (4.12) следует, что всегда можно выбрать положительное число δ_m такое, что выполняется неравенство

$$\frac{2\sqrt{2} M' |f|_1 \|f\|_0 \sigma_1(m)}{1 - \varkappa} \leqslant \delta_m \leqslant \frac{\delta_1}{\sqrt{m + 1/2}}. \tag{4.12}$$

Рассмотрим множество Ω_{δ_m} тех точек α, для которых $\|\alpha-\hat{\alpha}\|\leqslant\delta_m$. Для всех $\alpha\in\Omega_{\delta_m}$

$$\|\alpha-\hat{\alpha}\|\leqslant\frac{\delta_1}{\sqrt{m+1/2}}\leqslant\frac{\delta_0-|f|_0\sigma(m_0)}{\sqrt{m+1/2}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\delta_0-|f|_0\sigma(m)}{\sqrt{m+1/2}}\quad(m\geqslant m_1\geqslant m_0);$$

отсюда следует соотношение

$$\Omega_{\delta_m}\subset\Omega_m. \tag{4.13}$$

Тогда для любого $\alpha\in\Omega_{\delta_m}$ неравенство (4.9) принимает вид

$$\|J_m(\alpha)-J_m(\hat{\alpha})\|\leqslant 2|f|_2\sqrt{m+1/2}\,\delta_m \tag{4.14}$$

Выберем $\varkappa$ настолько малым, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\varkappa}{2|f|_2 M'}\leqslant\delta_0-|f|_0\sigma(m),$$

и положим

$$\delta_m=\frac{\varkappa}{2|f|_2 M'\sqrt{m+1/2}}.$$

Тогда для любого $\alpha\in\Omega_{\delta_m}$ выполняются в силу соотношений (4.12) — (4.14) все условия теоремы 2.1, а следовательно, уравнение (4.7) имеет в области Ω_{δ_m} единственное решение $\alpha=\bar{\alpha}$, для которого справедливо неравенство

$$\|\bar{\alpha}-\hat{\alpha}\|\leqslant\frac{2\sqrt{2}|f|_1\|f\|_0 M'\sigma_1(m)}{1-\varkappa}, \tag{4.15}$$

и существует приближение Бубнова — Галеркина

$$x=\bar{x}_m(t)=\frac{\bar{a}_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}(\bar{a}_n\cos nt+\bar{b}_n\sin nt).$$

В силу того что неравенство (4.15) эквивалентно неравенству

$$\|\bar{x}_m-\hat{x}_m\|_0\leqslant\frac{2|f|_1\|f\|_0 M'\sigma(m)}{1-\varkappa},$$

справедливо неравенство

$$|\bar{x}_m-\hat{x}_m|_0\leqslant\sqrt{2m+1}\,\|\bar{x}_m-\hat{x}_m\|_0\leqslant\frac{2|f|_1\|f\|_0 M'}{1-\varkappa}\,\frac{\sqrt{2m+1}}{m+1},$$

из которого получаем

$$|\bar{x}_m(t)-\hat{x}(t)|_0\leqslant|\bar{x}_m(t)-\hat{x}_m(t)|_0+|\hat{x}(t)-\hat{x}_m(t)|_0\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2|f|_1\|f\|_0 M'}{1-\varkappa}\,\frac{\sqrt{2m+1}}{m+1}+|f|_0\sigma(m),$$

что и требовалось доказать.

§ 5. СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Выясним условия, при выполнении которых из существования приближений $\bar{x}_m(t)$ Бубнова — Галеркина любого порядка $m \geqslant m_0$ следует существование периодического решения системы дифференциальных уравнений (1.1).

Теорема 2.3 [51, 124]. *Пусть для системы дифференциальных уравнений (1.1)*

а) выполняются условия 1 леммы 2.4;

б) существуют приближения Бубнова — Галеркина $x = \bar{x}_m(t)$ всех порядков $m \geqslant m_0$, принадлежащие области D вместе со своей ε-окрестностью;

в) любая из линейных систем дифференциальных уравнений

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{\partial \bar{f}_m}{\partial x} z(t) + \frac{\partial \bar{f}_m}{\partial y} z(t-\Delta), \quad m \geqslant m_0, \tag{5.1}$$

где $\bar{f}_m = f(t, \bar{x}_m(t), \bar{x}_m(t-\Delta))$, имеет функцию Грина $\bar{G}_m(t, \tau)$, удовлетворяющую неравенству

$$\| \bar{G}_m(t,\tau) \| \leqslant \bar{M} e^{-\bar{\lambda}|t-\tau|}, \quad t, \tau \in R, \ t \neq \tau \tag{5.2}$$

с положительными постоянными $\bar{M}$, $\bar{\lambda}$, не зависящими от m.

Тогда существует периодическое решение $x = \hat{x}(t)$ системы (1.1). Оно является единственным в окрестности $\bar{x}_m(t)$, принадлежит области D и удовлетворяет неравенству

$$| \hat{x}(t) - \bar{x}_m(t) |_0 \leqslant \frac{2\bar{M} \, | f |_1}{\bar{\lambda}(1-\varkappa)} \sigma(m), \quad 0 < \varkappa < 1. \tag{5.3}$$

Доказательство. По определению приближений Бубнова — Галеркина функция $\bar{x}_m(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\bar{x}_m(t)}{dt} = S_m f(t, \bar{x}_m(t), \bar{x}_m(t-\Delta)),$$

которое можно представить в виде

$$\frac{d\bar{x}_m(t)}{dt} = \frac{\partial \bar{f}_m}{\partial x} \bar{x}_m(t) + \frac{\partial \bar{f}_m}{\partial y} \bar{x}_m(t-\Delta) + \left[\bar{f}_m - \frac{\partial \bar{f}_m}{\partial x} \bar{x}_m(t) - \frac{\partial \bar{f}_m}{\partial y} \bar{x}_m(t-\Delta) - R_m \bar{f}_m \right]. \tag{5.4}$$

С учетом условия (5.2) m-е приближение Бубнова — Галеркина можно записать, исходя из (5.4), в виде

$$\bar{x}_m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{G}_m(t, \tau) \left[\bar{f}_m - \frac{\partial \bar{f}_m}{\partial x} \bar{x}_m(\tau) - \frac{\partial \bar{f}_m}{\partial y} \bar{x}_m(\tau-\Delta) - R_m \bar{f}_m \right] d\tau. \tag{5.5}$$

Покажем, что уравнение

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{G}_m(t, \tau)\left[f(\tau, x(\tau), \varkappa(\tau-\Delta)) - \frac{\partial \overline{f}_m}{\partial x} x(\tau) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \overline{f}_m}{\partial y} x(\tau - \Delta)\right] d\tau \qquad (5.6)$$

имеет периодическое решение. Для этого применим метод последовательных приближений, приняв за нулевое приближение $x_0(t)$ m-е приближение Бубнова — Галеркина с достаточно большим m: $x_0(t) = \overline{x}_0(t)$; последующие приближения определим согласно формуле

$$x_{k+1}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{G}_m(t, \tau)\left[f(\tau, x_k(\tau)\, x_k(\tau-\Delta)) - \frac{\partial \overline{f}_m}{\partial x} x_k(\tau) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \overline{f}_m}{\partial y} x_k(\tau - \Delta)\right] d\tau. \qquad (5.7)$$

Обозначим через D_δ область точек x, удовлетворяющих неравенству $\| x(t) - \overline{x}_m(t) \| \leqslant \delta$ для всех $t \in \mathfrak{T}_1$, и выберем δ и $\varkappa$ настолько малыми, чтобы выполнялись неравенства

$$0 < \delta \leqslant \frac{\varkappa \overline{\lambda}}{4\overline{M}\, | f |_1} \leqslant \varepsilon < 1. \qquad (5.8)$$

Оценим разность $x_1(t) - x_m(t)$. Из соотношений (5.5), (5.7) получаем равенство

$$x_1(t) - x_0(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} \overline{G}_m(t, \tau) R_m \overline{f}_m d\tau,$$

из которого следует неравенство

$$| x_1(t) - x_0(t) |_0 \leqslant \frac{2\overline{M}}{\overline{\lambda}} | R_m \overline{f}_m |_0 \leqslant \frac{2\overline{M}}{\overline{\lambda}} | f |_1 \, \sigma(m). \qquad (5.9)$$

Выберем теперь число m_1 настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{2\overline{M}\, | f |_1}{\overline{\lambda}\,(1-\varkappa)} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m_1}} \leqslant \delta. \qquad (5.10)$$

Тогда в силу (5.10) из (5.9) следует неравенство

$$| x_1(t) - x_0(t) |_0 \leqslant \delta$$

при $m \geqslant m_1$. Предположим, что для любых k справедливы неравенства

$$| x_k(t) - x_{k-1}(t) |_0 \leqslant \varkappa^{k-1} | x_1(t) - x_0(t) |_0; \qquad (5.11)$$

$$| x_k(t) - x_0(t) |_0 \leqslant \delta. \qquad (5.12)$$

Тогда для разности $x_{k+1}(t) - x_k(t)$ согласно (5.7) получаем оценку

$$\| x_{k+1}(t) - x_k(t) \| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \| \bar{G}_m(t, \tau) \| \Big\| f(\tau, x_k(\tau), x_k(\tau - \Delta)) -$$

$$- f(\tau, x_{k-1}(\tau), x_{k-1}(\tau - \Delta)) - \frac{\partial \bar{f}_m}{\partial x} (x_k(\tau) - x_{k-1}(\tau)) -$$

$$- \frac{\partial \bar{f}_m}{\partial y} (x_k(\tau - \Delta) - x_{k-1}(\tau - \Delta)) \Big\| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4\bar{M}}{\bar{\lambda}} | f |_1 \delta | x_k(t) - x_{k-1}(t) |_0 \leqslant \varkappa^k | x_1(t) - x_0(t) |_0. \tag{5.13}$$

Кроме того, с учетом (5.11) получаем неравенство

$$| x_{k+1}(t) - x_0(t) |_0 \leqslant \frac{2\bar{M} \, | f |_1 \sigma(m)}{\bar{\lambda}(1 - \varkappa)} < \delta \tag{5.14}$$

для всех $m \geqslant m_1 \geqslant m_0$. Таким образом, для любых $k = 1, 2, \ldots$ и $m \geqslant m_1$ выполняются неравенства (5.11), (5.12) и, следовательно, последовательность функций $\{x_k(t)\}$, определяемая соотношением (5.7), равномерно сходится для всех $k = 1, 2, \ldots, m \geqslant m_1$ в области D_δ. Переходя в (5.7) к пределу при $k \to \infty$, замечаем, что предельная функция $\hat{x}(t)$ последовательности $\{x_k(t)\}$ является периодическим решением уравнения (5.6), а следовательно, и системы (5.1), удовлетворяющим неравенству (5.3), которое следует из (5.14).

Единственность периодического решения в δ-окрестности приближения $\bar{x}_m(t)$ следует из существования функции Грина $\bar{G}_m(t, \tau)$.

§ 6. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА БУБНОВА — ГАЛЕРКИНА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t), \int_t^{t+T} \varphi(t, \theta, x(\theta)) d\theta\right), \tag{6.1}$$

где $f(t, x, u)$, $\varphi(t, \theta, x)$ — периодические по t, θ с периодом 2π n-мерные вектор-функции, $T = \text{const} > 0$. Пусть в линейной системе интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{dz(t)}{dt} = A(t) z(t) + \int_t^{t+T} B(t, \theta) z(\theta) d\theta + c(t) \tag{6.2}$$

$A(t)$, $c(t) \in C^0(\mathfrak{T}_1)$, $B(t, \theta) \in C^0(\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_1)$. Предположим, что система (2.1) имеет функцию Грина $G_0(t, \tau)$, удовлетворяющую неравенству

$$\| G_0(t, \tau) \| \leqslant M_0 e^{-\lambda_0 |t - \tau|}, \quad t \neq \tau, t, \quad \tau \in R. \tag{6.3}$$

Для функции Грина $G_0(t, \tau)$ справедливы леммы, доказательство которых аналогично доказательству лемм 2.2, 2.3. Приведем одну из них [124].

Лемма 2.6. *Пусть система линейных интегро-дифференциальных уравнений* (6.2) *имеет функцию Грина* $G_0(t, \tau)$, *удовлетворяющую неравенству* (6.3). *Тогда, если матрицы* $A_0(t) \in C^0(\mathfrak{T}_1)$ *и* $B_0(t, \theta) \in C^0(\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_1)$ *настолько малы, что для* λ, $0 < \lambda < \lambda_0$, *выполняется неравенство*

$$\frac{M_0}{\lambda_0 - \lambda}\left[2|A_0|_0 + \frac{|B_0|_0}{\lambda e^{\lambda T}}(e^{2\lambda T} - 1)\right] \leqslant \rho < 1, \qquad (6.4)$$

то возмущенная система интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{dz(t)}{dt} = [A(t) + A_0(t)]z(t) + \int\limits_t^{t+T}[B(t, \theta) + B_0(t, \theta)]z(\theta)\,d\theta + c(t)$$

имеет функцию Грина $G(t, \tau)$, *удовлетворяющую неравенству*

$$\|G(t,\tau)\| \leqslant Me^{-\lambda|t-\tau|}, \quad t, \tau \in R, \quad t \neq \tau,$$

где

$$M = M_0\left\{1 + \frac{M_0}{(1-\rho)\lambda_0}\left[|A_0|_0 + \frac{|B_0|_0}{\lambda_0}(e^{\lambda_0 T} - 1)\right]\Delta(\lambda_0, \lambda)\right\};$$

$$\Delta(\lambda_0, \lambda) = \sup_{t \geqslant 0}\,[(1 + \lambda_0 t)\,e^{-(\lambda_0 - \lambda)t}].$$

Воспользовавшись этими леммами, можно доказать утверждения, аналогичные теоремам 2.2, 2.3.

Теорема 2.4 [124]. *Пусть система интегро-дифференциальных уравнений (6.1) удовлетворяет следующим условиям:*

а) $\varphi(t, \theta, x) \in C^2(\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_1 \times D)$; $f(t, x, u) \in C^2(\mathfrak{T}_1 \times D \times D_1)$,

где D — *некоторая ограниченная выпуклая область евклидова пространства* E_n, $D_1 : \|u\| \leqslant d$ — *шар этого пространства*;

б) $d \geqslant T \max\limits_{\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_1 \times D} \|\varphi(t, \theta, x)\|$;

в) существует периодическое с периодом 2π *решение* $x = \hat{x}(t)$, *принадлежащее области* D *с некоторой своей* δ_0*-окрестностью*;

г) система уравнений в вариациях для решения $x = \hat{x}(t)$

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x}z(t) + \frac{\partial \hat{f}}{\partial u}\int\limits_t^{t+T}\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x}z(\theta_1)\,d\theta_1,$$

где

$$\hat{f} = f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)), \quad \hat{u}(t) = \int\limits_t^{t+T}\varphi(t, \theta, \hat{x}(\theta))\,d\theta, \quad \hat{\varphi} = \varphi(t, \theta_1, \hat{x}(\theta_1)),$$

имеет функцию Грина $G_0(t, \tau)$, *удовлетворяющую условию (6.3).*

Тогда можно указать такое достаточно большое m_0, чтобы при всех $m \geqslant m_0$ существовали приближения Бубнова — Галеркина $x = \bar{x}_m(t)$, равномерно сходящиеся при $m \to \infty$ к точному периодическому решению $x = \hat{x}(t)$ и удовлетворяющие неравенству

$$|\bar{x}_m(t) - \hat{x}(t)|_0 \leqslant M_1 \frac{\sqrt{2m+1}}{m+1} + |f|_0 \sigma(m),$$

где M_1 — положительная постоянная, не зависящая от m.

Рассмотрим теперь систему интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с бесконечным последействием вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t), \int_{-\infty}^{t} R(t-\theta)\,\varphi(t, \theta, x(\theta))\,d\theta\right), \tag{6.5}$$

где

$$f(t, x, z) = (f_1(t, x, z), f_2(t, x, z), \ldots, f_n(t, x, z));$$

$\varphi(t, \theta, x) = (\varphi_1(t, \theta, x), \varphi_2(t, \theta, x), \ldots, \varphi_m(t, \theta, x))$ — периодические по t, θ с периодом 2π вектор-функции; ядро $R(t-\theta)$ является кусочно-непрерывным и таким, что выполняется неравенство

$$\|R(t-\theta)\| \leqslant K_0 e^{-\gamma_0 |t-\theta|} \tag{6.6}$$

для всех действительных t и θ; K_0, γ_0 — некоторые положительные постоянные.

Будем считать, что вектор-функции $f(t, x, z) \in C^2(\mathfrak{T}_1 \times D \times D_1)$, $\varphi(t, \theta, x) \in C^2(\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_1 \times D)$, где D — некоторая ограниченная выпуклая область евклидова пространства E_n, $D_1: \|z\| \leqslant d$ — шар пространства E_m, $\mathfrak{T}_1 = [0, 2\pi]$.

Рассмотрим линейную систему интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy(t)}{dt} = A(t)\,y(t) + \int_{-\infty}^{t} R(t-\theta)\,B(t, \theta)\,y(\theta)\,d\theta + c(t), \tag{6.7}$$

где матрицы $A(t) \in C^0(\mathfrak{T}_1)$, $B(t, \theta) \in C^0(\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_1)$, вектор-функция $c(t) \in C^0(\mathfrak{T}_1)$, а матрица $R(t-\theta)$ является кусочно-непрерывной, удовлетворяющей неравенству (6.6). Как и раньше, для системы линейных интегро-дифференциальных уравнений (6.7) матричную функцию $G_0(t, \tau)$ будем называть функцией Грина, если при $t \neq \tau$ она определена, непрерывна по переменным t и τ, удовлетворяет соответствующей системе (6.7) однородной системе ($c(t) = 0$), при $t = \tau$ терпит разрыв со скачком E и удовлетворяет неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|G_0(t, \tau)\|\,d\tau \leqslant M^0 < \infty, \quad t, \tau \in R, \ t \neq \tau$$

(E — единичная матрица, $R = (-\infty, \infty)$).

Пусть система линейных интегро-дифференциальных уравнений (6.7) имеет функции Грина $G_0(t, \tau)$, удовлетворяющие условию

$$\|G_0(t, \tau)\| \leqslant M_0 e^{-\lambda_0 |t-\tau|}, \quad t, \ \tau \in R, \ t \neq \tau, \tag{6.8}$$

где M_0, λ_0 — некоторые положительные постоянные, причем $\lambda_0 < \gamma_0$. Легко убедиться, что при этих предположениях система уравнений

(6.7) всегда имеет единственное периодическое с периодом ω решение $y=y(t)$ вида

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(t, \tau) c(\tau) d\tau. \tag{6.9}$$

Для функции Грина $G_0(t, \tau)$ системы интегро-дифференциальных уравнений (6.7) справедливы леммы, аналогичные леммам 2.2, 2.3.

Как доказано в работе [22], для систем интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с бесконечным последействием имеют место утверждения, доказательство которых аналогично предыдущим. Приведем одно из них.

Теорема 2.5. *Пусть правая часть системы интегро-дифференциальных уравнений (6.5) удовлетворяет следующим условиям:*

1) $f(t, x, z) \in C^2(\mathfrak{T}_1 \times D \times D_1)$, $\varphi(t, \theta, x) \in C^2(\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_1 \times D)$;

2) $R(t-\theta)$ *— кусочно-непрерывная матрица, удовлетворяющая неравенству*

$$\| R(t-\theta) \| \leqslant K_0 e^{-\gamma|t-\theta|}$$

для всех действительных t *и* θ; K_0, γ_0 *— положительные постоянные;*

3) существуют приближения Бубнова — Галеркина $x=\bar{x}_m(t)$ *для всех порядков* $m \geqslant m_0$, *принадлежащие области* D *вместе с некоторой своей* ε*-окрестностью, где* m_0 *— положительное целое число,* ε *— заданная величина;*

4) любая из линейных систем интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} y(t) + \int_{-\infty}^{\infty} R(t-\theta_1) \frac{\partial \bar{f}_m}{\partial z} \frac{\partial \bar{\varphi}_m}{\partial x} y(\theta_1) d\theta_1, \quad m \geqslant m_0,$$

где

$$\bar{f}_m \doteq f(t, \bar{x}_m(t), \bar{z}_m(t)),$$

$$\bar{z}_m(t) = \int_{-\infty}^{t} R(t-\theta) \varphi(t, \theta, \bar{x}_m(\theta)) d\theta,$$

$$\bar{\varphi}_m = \varphi(t, \theta_1, \bar{x}_m(\theta_1)),$$

имеет функцию Грина $G_m(t, \tau)$, *удовлетворяющую неравенству*

$$\| G_m(t, \tau) \| \leqslant \bar{M} e^{-\bar{\lambda}|t-\tau|}, \quad t, \tau \in R, \ t \neq \tau,$$

с положительными постоянными $\bar{M}$, $\bar{\lambda}$, *не зависящими от* m.

Тогда существует периодическое с периодом 2π *решение* $x=\hat{x}(t)$ *системы уравнений (6.5), принадлежащее области* D. *Это решение является единственным в окрестности* $\bar{x}_m(t)$ *и удовлетворяет неравенству*

$$|\hat{x} - \bar{x}_m|_0 \leqslant \frac{2Mc_6 \| f \|_1}{\bar{\lambda}(1-\varkappa)},$$

где $\varkappa$ *— некоторое фиксированное число* $0 < \varkappa < 1$.

Глава III

КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ. МЕТОД БУБНОВА — ГАЛЕРКИНА

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $\mathfrak{T}_m : 0 \leqslant \varphi_j \leqslant 2\pi$, $j = 1, \ldots, m$, — m-мерный тор, а $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$ — координаты на нем. Рассмотрим непрерывную функцию $f(\varphi) = (f_1(\varphi), f_2(\varphi), \ldots, f_s(\varphi))$, периодическую по φ_j, $j = 1, \ldots, m$, с периодом 2π, т. е. $f(\varphi + 2k\pi) = f(\varphi)$ для всех целочисленных k_j, кроме нуля, $k = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$. Для таких функций норму выберем следующим образом:

$$\|f\|_0 = \max_{\varphi \in \mathfrak{T}_m} \|f(\varphi)\|, \tag{1.1}$$

где $\|\cdot\|$ обозначает, как и раньше, обычную евклидову норму. Совокупность всех непрерывных 2π-периодических функций с нормой, определяемой формулой (1.1), образует полное нормированное пространство $C(\mathfrak{T}_m)$. Для целого положительного r посредством $C^r(\mathfrak{T}_m)$ будем обозначать полное нормированное пространство функций $f(\varphi)$ с нормой

$$|f|_r = \max_{0 \leqslant |\rho| \leqslant r} \max_{\varphi \in \mathfrak{T}_m} \|D^\rho f(\varphi)\|,$$

где $\rho = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$ — целочисленный вектор с неотрицательными координатами: $|\rho| = \sum_{i=1}^{m} \rho_i$ и

$$D^\rho = \frac{\partial^{|\rho|}}{\partial \varphi_1^{\rho_1} \partial \varphi_2^{\rho_2} \ldots \partial \varphi_m^{\rho_m}}.$$

Будем говорить, что совокупность чисел $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)$ образует базис или является несоизмеримой, если $(k, \omega) = k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + k_m\omega_m \neq 0$ для всех целочисленных чисел k_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, кроме нуля

Пусть $f \in C(\mathfrak{T}_m)$ и ω — некоторый базис. Функцию $F(t) = f(\omega t)$ будем называть квазипериодической функцией с частотным базисом ω. Из определения квазипериодической функции следует, что она определена для всех $-\infty < t < \infty$. Совокупность всех этих функций образует линейное пространство, которое превращается в нормированное пространство, если ввести норму

$$|F|_0 = \sup_{-\infty < t < \infty} |F(t)|,$$

причем

$$|F|_0 = \sup_{-\infty<t<\infty} |f(\omega t)| = |f|_0.$$

Обозначим множество таких функций через $C(\omega)$. Через $T(\mathfrak{T}_m)$ будем обозначать множество действительных тригонометрических полиномов вида

$$P(\varphi) = \sum_{\|n\|\leq N} P^{(n)} e^{i(n,\varphi)},$$

где N — любое неотрицательное число, комплекснозначные коэффициенты которого подчинены условию $P^{(n)} = \overline{P}^{(-n)}$, $P=(P_1, P_2, \dots, P_s)$. Для любых двух полиномов $P \in T(\mathfrak{T}_m)$, $Q \in T(\mathfrak{T}_m)$ и целого положительного $r > 0$ введем скалярное произведение с помощью соотношения [6]

$$(P, Q)_r = \sum_n (1 + \|n\|^2)^r \langle P^{(n)}, Q^{(-n)} \rangle, \tag{1.2}$$

где $\langle P^{(n)}, Q^{(-n)} \rangle = \sum_{i=1}^{s} P_i^{(n)} Q_i^{(-n)}$. Так как произведение (1.2) удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения, то оно индуцирует норму

$$\|P\|_r^2 = (P, P)_r = \sum_{\|n\|\leq N} (1 + \|n\|^2)^r |P^{(n)}|^2.$$

Обозначим через $\mathbf{K}$ оператор $1 - \Delta_1$, где $\Delta_1 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_i^2}$. Тогда

$$\mathbf{K}P(\varphi) = \sum_{\|n\|\leq N} (1 + \|n\|^2) P^{(n)} e^{i(n,\varphi)},$$

$$\mathbf{K}^r P(\varphi) = \sum_{\|n\|\leq N} (1 + \|n\|^2)^r P^{(n)} e^{i(n,\varphi)}$$

и

$$(P, Q)_r = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{K}P, Q \rangle \, d\varphi, \tag{1.3}$$

поскольку $P^{(n)}$ определяется по формуле

$$P^{(n)} = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} P(\varphi) e^{-i(n,\varphi)} d\varphi.$$

Поэтому, пополняя пространство $T(\mathfrak{T}_m)$ по норме $\|\cdot\|_r$, получаем гильбертово (сепарабельное) пространство $H^r(\mathfrak{T}_m)$. В этом пространстве действует теорема о компактности, утверждающая, что для любой ограниченной по норме пространства $H^r(\mathfrak{T}_m)$ бесконечной последовательности найдется всегда сходящаяся по норме в пространстве $H^s(\mathfrak{T}_m)$ подпоследовательность, если $s < r$.

Для любых функций $f(\varphi) \in H^r(\mathfrak{T}_m)$, $g(\varphi) \in H^r(\mathfrak{T}_m)$ выполняются неравенство Шварца

$$|(f, g)_r| \leqslant \|f\|_r \|g\|_r$$

и его обобщение

$$|(f, g)_r| \leqslant \|f\|_{r-s} \|g\|_{r+s}, \qquad (1.4)$$

если $0 \leqslant s \leqslant r$ и $g(\varphi) \in H^{r+s}(\mathfrak{T}_m)$. Из неравенства (1.4) при условии, что $f(\varphi) \in H^{r+s}(\mathfrak{T}_m)$, следует неравенство

$$\|f\|_r^2 \leqslant \|f\|_{r-s} \|f\|_{r+s}, \qquad (1.5)$$

из которого получаем при $s < r$

$$\|f\|_s \leqslant \|f\|_r. \qquad (1.6)$$

Из неравенства

$$(1 + \|n\|)^s \leqslant \varepsilon (1 + \|n\|^2)^{s_1} + \varepsilon^{s_0 - s/s_1 - s} (1 + \|n\|^2)^{s_0}$$

следует оценка

$$\|f\|_s \leqslant \varepsilon \|f\|_{s_1} + \varepsilon^{(s_0 - s)/(s_1 - s)} \|f\|_{s_0} \qquad (1.7)$$

для всех $s_1 \geqslant s \geqslant s_0$, $\varepsilon > 0$, $f(\varphi) \in H^{s_1}(\mathfrak{T}_m)$. Полагая $s_1 = r$, $s_0 = 0$, при соответствующем выборе ε из неравенства (1.7) можно получить неравенство

$$\|f\|_s \leqslant 2 \|f\|_0^{1-s/r} \|f\|_r^{s/r}, \quad 0 \leqslant s \leqslant r, \qquad (1.8)$$

если $f(\varphi) \in H^r(\mathfrak{T}_m)$.

Для функции $f(\varphi) = \sum\limits_n f^{(n)} e^{i(n, \varphi)}$ для каждой частной производной $D^\rho f$ имеем

$$D^\rho f = \sum_n (in)^\rho f^{(n)} e^{i(n, \varphi)}, \qquad (1.9)$$

где $(in)^\rho = (in_1)^{\rho_1} (in_2)^{\rho_2} \ldots (in_m)^{\rho_m}$. Из соотношения (1.9) следуют не равенства

$$\|D^\rho f\|_r \leqslant \|f\|_{r+|\rho|}; \qquad (1.10)$$

$$\|f\|_r \leqslant c \sum_{|\rho| \leqslant r} \|D^\rho f\|_0, \qquad (1.11)$$

причем c ависит от r.

Используя теорему Рисса—Фишера, легко показать, что пространство $H^0(\mathfrak{T}_m)$ можно отождествлять (в смысле изоморфизма) с пространством $L_2(\mathfrak{T}_m)$ интегрируемых с квадратом функций со скалярным произведением (1.') при $r = 0$, причем выполняется равенство Парсеваля

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} \langle f, f \rangle \, d\varphi = \sum_n \|f^{(n)}\|^2.$$

Функцию $f^{(\rho)}(\varphi) \in H^0(\mathfrak{T}_m)$ будем называть ρ-й производной функции $f(\varphi) \in H^0(\mathfrak{T}_m)$, если

$$(f^{(\rho)}, P)_0 = (-1)^{|\rho|} (f, D^\rho P)_0, \quad P \subset T(\mathfrak{T}_m).$$

Тогда $H^r(\mathfrak{T}_m)$ есть не что иное, как подпространство функций $H^0(\mathfrak{T}_m)$, имеющих обобщенные производные до порядка r включительно: $f^{(\rho)}(\varphi) \in H^0(\mathfrak{T}_m)$ $(|\rho| \leqslant r)$, причем $f^{(\rho)}(\varphi) = D^\rho f(\varphi)$.

Пространство $H^r(\mathfrak{T}_m)$, будучи пространством с интегральной нормой, удобно в тех случаях, когда приходится использовать дифференциальные операторы и их обращения.

В дальнейшем будут необходимы теоремы С. Л. Соболева о вложении и компактности, а также другие утверждения [6, 129].

Теорема 3.1. *Если* $f(\varphi) \in H^r(\mathfrak{T}_m)$, $r > m/2 + s$, *то* $f(\varphi) \in C^s(\mathfrak{T}_m)$ *и*

$$|f|_s \leqslant c \|f\|_r, \tag{1.12}$$

где $c < \sqrt{1 + 2^m \frac{2(r-s)+1-m}{2(r-s)-m}}$.

Теорема 3.2 [1.9]. *Последовательность ограниченных в* $H^r(\mathfrak{T}_m)$ *функций компактна в* $H^s(\mathfrak{T}_m)$ *при* $s < r$. *Если* $f(\varphi) \in H^r(\mathfrak{T}_m)$, *то*

$$\Big\| \sum_{\|n\| \geqslant N} f^{(n)} e^{i(n,\varphi)} \Big\|_s \leqslant N^{-r+s} \|f\|_r, \quad r \geqslant s. \tag{1.13}$$

Если матрица $A(\varphi) \in C^r(\mathfrak{T}_m)$, *а* $f(\varphi) \in H^r(\mathfrak{T}_m)$, *то*

$$\|A(\varphi) f(\varphi)\|_r \leqslant c |A|_r \|f\|_r. \tag{1.14}$$

Лемма 3.1 [89]. *Пусть* $f(\varphi, y) \in C^r(\mathfrak{T}_m, D_1)$, *где* $D_1 = \{y \mid \|y\| \leqslant 1\}$ *а* $g(\varphi) \in H^r(\mathfrak{T}_m) \cap C(\mathfrak{T}_m)$ *и* $|g(\varphi)|_0 \leqslant 1$. *Тогда*

$$\|f(\varphi, g(\varphi))\|_r \leqslant c |f|_r (1 + \|g\|_r), \tag{1.15}$$

причем постоянная c *не зависит от* f *и* g.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$L = \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi_\nu} + b(\varphi),$$

где $a_\nu(\varphi)$, $b(\varphi)$ — $(s \times s)$-мерные матрицы. Справедливо следующее утверждение [89].

Лемма 3.2. *Пусть оператор* L *удовлетворяет таким условиям:*

1) $a_\nu(\varphi)$, $b(\varphi) \in C^r(\mathfrak{T}_m)$;

2) $a_\nu^T(\varphi) = a_\nu(\varphi)$;

3) существует число $\gamma_0 > 0$ *такое, что для любых векторов* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ *и* $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_s)$ $\|\xi\| = \|\eta\| = 1$ *и при любом целом* $l = 0, 1, \ldots, r$ *выполняется неравенство*

$$\Big\langle \Big(l \sum_{\nu,\mu=1} \frac{\partial a_\nu(\varphi)}{\partial \varphi_\mu} \xi_\mu \xi_\nu + b_0(\varphi) \Big) \eta, \eta \Big\rangle \geqslant \gamma_0 > 0, \tag{1.16}$$

где

$$b_0(\varphi) = b(\varphi) - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial a_\nu(\varphi)}{\partial \varphi_\nu}.$$

Тогда для любой функции $u(\varphi) \in H^0(\mathfrak{T}_m)$

$$(Lu, u)_0 \geqslant \gamma_0 \|u\|_0^2 \tag{1.17}$$

и для любой функции $u(\varphi) \in H^r(\mathfrak{T}_m) \cap C^2(\mathfrak{T}_m)$, *удовлетворяющей неравенству* $|u(\varphi)|_2 \leqslant 1$,

$$(Lu, u)_r \geqslant \gamma_1 \|u\|_r^2 - \delta_1 \left(1 + \sum_{\nu=1}^{m} \|a_\nu\|_r + \|b\|_r\right)^2, \tag{1.18}$$

где γ_1 *и* δ_1 *не зависят от* $u(\varphi)$.

В дальнейшем под m-частотным процессом или m-частотным колебанием систем с запаздыванием будем подразумевать процесс, описываемый квазипериодической функцией, базис частот которой содержит m чисел. Такие колебания могут возникнуть в реальных системах, описываемых дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = X(\omega t, x(t), x(t-\Delta)), \tag{1.19}$$

которые являются частью динамической системы

$$\frac{dx(t)}{dt} = X(\varphi, x(t), x(t-\Delta)),$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega.$$

В общем случае, если динамическая система

$$\frac{dx(t)}{dt} = X(x(t), x(t-\Delta)) \tag{1.20}$$

описывает некоторый m-частотный колебательный процесс $x = x(t)$, это значит, что $x = f(\omega t)$, где $f \in C(\mathfrak{T}_m)$, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$.

С квазипериодическим решением системы (1.20) можно связать некоторое инвариантное множество M. Это множество задается уравнением

$$M: x = f(\varphi), \quad \varphi \in \mathfrak{T}_m, \tag{1.21}$$

поскольку по теореме Вейля замыкание квазипериодической траектории $f(\omega t)$ дает множество значений функции $f(\varphi)$, $\varphi \in \mathfrak{T}_m$, а замыкание любой траектории, если оно не пустое и не бесконечномерное, является инвариантным.

В случае, если $f(\varphi) \in C'(\mathfrak{T}_m)$ и ранг матрицы $\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi}$ равен $m < 2n$, где n — размерность фазового пространства системы (1.20), равенство 1.21) задает взаимно-однозначное и непрерывное соответствие между точками x поверхности M и точками куба $\mathfrak{T}_m: 0 \leqslant \varphi_j \leqslant 2\pi$, $j = 1, \ldots, m$, с отождествленными противоположными гранями. Поскольку куб $\mathfrak{T}_m$ является топологическим многообразием, гомеоморфным m-мерному тору, то поверхность M в этом случае представляет собой тор (в общем случае — тороидальное множество). Все траектории системы (1.20), начинающиеся на этом торе, — также квазиперио-

дические с тем же частотным базисом ω и определяются уравнением

$$x = f(\omega t + \varphi), \tag{1.22}$$

где φ — постоянная. Если на инвариантном торе M ввести локальные координаты $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, то траектории на торе системы (1.20) можно получить по формуле (1.22), считая, что переменная φ определяется динамической системой

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega. \tag{1.23}$$

Если $f(\varphi)$ — непрерывно дифференцируемая функция, то согласно лемме Кронекера [42], она будет классическим решением уравнения

$$\sum_{\nu=1}^{m} \omega_\nu \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi_\nu} = X(\varphi, f(\varphi), f(\varphi - \omega\Delta)). \tag{1.24}$$

Таким образом, вопрос существования квазипериодических решений системы (1.19) сводится к вопросу существования периодических решений системы (1.24).

В дальнейшем через S_N будем обозначать оператор, ставящий в соответствие интегрируемой с квадратом функции $f(\varphi)$ отрезок ее ряда Фурье длины N:

$$S_N f(\varphi) = \sum_{\|n\| \leqslant N} f^{(n)} e^{i(n,\varphi)},$$

$$f^{(n)} = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, e^{-i(n,\varphi)} d\varphi.$$

Поскольку любую квазипериодическую функцию можно сколь угодно точно приблизить тригонометрическими полиномами в равномерной метрике, то можно попытаться построить квазипериодическое решение системы (1.19) или периодическое решение уравнения (1.24) в виде последовательности тригонометрических полиномов

$$f_N(\varphi) = \sum_{\|n\| \leqslant N} u_N^{(n)} e^{i(n,\varphi)}, \quad N = 1, 2, \ldots .$$

Для построения приближенного решения $f_N(\varphi)$ уравнения (1.23) применим метод Бубнова — Галеркина, предположив, что коэффициенты этого полинома находятся из системы нелинейных уравнений

$$S_N \left(\sum_{\nu=1}^{m} \omega_\nu \frac{\partial f_N(\varphi)}{\partial \varphi_\nu} - X(\varphi, f_N(\varphi), f_N(\varphi - \omega\Delta)) \right) = 0. \tag{1.25}$$

Для обоснования метода Бубнова — Галеркина необходимо доказать разрешимость системы (1.25) и сходимость последовательности $f_N(\varphi)$ к точному решению $f(\varphi)$ при $N \to \infty$.

§ 2. ПОСТРОЕНИЕ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ МЕТОДОМ БУБНОВА — ГАЛЕРКИНА

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с квазипериодической правой частью вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(\omega t, x(t), x(t-\Delta)), \tag{2.1}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$ — s-мерный вектор, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_s)$ — s-мерная вектор-функция, определенная в области $\mathfrak{T}_m \times D \times D$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots \ldots, \omega_m)$ — базис частот.

Предположим, что система (2.1) имеет достаточно гладкое квазипериодическое решение $x^0(t)$ с базисом частот ω. Тогда существует на торе $\mathfrak{T}_m$ функция $u^0(\varphi)$ такая, что $x^0(t) = u^0(\omega t)$, и функция $u^0(\varphi)$ будет решением уравнения

$$\sum_{\nu=1}^{m} \omega_\nu \frac{\partial u(\varphi)}{\partial \varphi_\nu} = f(\varphi, u(\varphi), u(\varphi - \omega\Delta)). \tag{2.2}$$

В дальнейшем через C^m будем обозначать пространство векторов с комплексными коэффициентами, а через Z^m — множество всех m-мерных векторов с целочисленными коэффициентами.

Пусть

$$u_N(\varphi) = \sum_{\|n\| \leqslant N} u_N^{(n)} e^{i(n,\varphi)} = \sum_{\|n\| \leqslant N, n_i \geqslant 0} (a_N^{(n)} \cos(n, \varphi) + b_N^{(n)} \sin(n, \varphi)), \tag{2.3}$$

где

$$u_N^{(n)} \in C^s, \quad u_n^{(-n)} = \bar{u}_N^{(n)}, \quad a_N^{(n)} \in R^s, \quad b_N^{(n)} \in R^s.$$

Если упорядочить векторы Z^m по определенному закону, то полиному $u_N(\varphi)$ всегда можно поставить в соответствие вещественный вектор-столбец $\mathbf{u}_N$, составленный из $2n$-мерных вектор-столбцов $(a_N^{(n)}, b_N^{(n)})$, следующих друг за другом сверху вниз в порядке, определенном законом упорядочения векторов $n \in Z^m$. Таким образом, полиному $u_N(\varphi)$ всегда можно поставить в соответствие $(2sP(N)+s)$-мерный вектор $\mathbf{u}_N$, где $P(N) = \sum_{\|n\| \leqslant N, n_i \geqslant 0} 1$.

Имеют место следующие соотношения:

$$\| u_N(\varphi) \|_0 = \| \mathbf{u}_N \|; \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial u_N'(\varphi)}{\partial \mathbf{u}_N} \mathbf{u}_N'' = \mathbf{u}_N''(\varphi), \tag{2.5}$$

где $\dfrac{\partial u_N'(\varphi)}{\partial u_N'}$ — $(s \times (sP(N)+s))$-мерная матрица Якоби.

Приближенное решение уравнения (2.2) будем искать в виде полинома $u_N(\varphi)$, коэффициенты которого находятся из системы нелинейных уравнений

$$S_N\left(\sum_{\nu=1}^{m}\omega_\nu \frac{\partial u_N(\varphi)}{\partial\varphi_\nu} - f(\varphi, u_N(\varphi), u_N(\varphi-\omega\Delta))\right) = 0, \qquad (2.6)$$

которую с учетом изложенных выше рассуждений можно записать в виде

$$\mathbf{F}_N(\mathbf{u}_N) = 0, \qquad (2.7)$$

где $\mathbf{F}_N$ — $(s+2sP(N))$-мерный вектор. Полином (2.3), удовлетворяющий уравнению (2.6), будем называть приближением Бубнова — Галеркина порядка N, а уравнение (2.7) — определяющим уравнением.

Найдем условия, которые необходимо наложить на правую часть системы (2.1), чтобы выполнялись условия теоремы 2.1 и, следовательно, чтобы определяющее уравнение (2.7) имело решение. Эти условия определяются из следующих утверждений [28].

Лемма 3.3. *Предположим, что система дифференциальных уравнений (2.1) удовлетворяет следующим условиям:*

1) существует решение $u^0(\varphi)$ уравнения (2.2), принадлежащее области

$$D_\delta = \{u \mid u \in R^s,\ \| u^0(\varphi) - u(\varphi) \| \leqslant \delta\} \subset D,\ \delta > 0,$$

и $u^0(\varphi) \in H^r(\mathfrak{T}_m)$, $r \geqslant m/2+2$;

2) $f(\varphi, u, v) \in C^2(\mathfrak{T}_m \times \overline{D} \times \overline{D})$;

3) существует положительное число γ_0 такое, что для любого вектора $\eta \in R^s$, $\|\eta\| = 1$, и любых $(\varphi, u, v) \in (\mathfrak{T}_m \times D_\delta \times D_\delta)$ выполняются неравенства

$$\left\langle \frac{\partial f(\varphi, u, v)}{\partial u}\eta, \eta \right\rangle \geqslant 2\gamma_0 \|\eta\|^2, \quad \gamma_0 > 0,$$

$$\left| \frac{\partial f(\varphi, u, v)}{\partial v} \right|_0 \leqslant \gamma_0.$$

Тогда существуют числа $N_0 > 0$, $c_1 > 0$ такие, что при $N \geqslant N_0$ имеет место соотношение

$$u_N^0(\varphi) \in D_{\delta/2} = \{u \mid \| u^0(\varphi) - u(\varphi) \| \leqslant \delta/2\},$$

а вектор $\mathbf{u}_N^0$, соответствующий полиному $u_N^0(\varphi)$, удовлетворяет неравенству

$$\| \mathbf{F}_N(\mathbf{u}_N^0) \| \leqslant c_1 N^{-(r-1)}. \qquad (2.8)$$

Доказательство. Согласно теореме 3.2 имеем оценку

$$\| u^0(\varphi) - u_N^0(\varphi) \|_0 \leqslant N^{-r} \| u^0(\varphi) \|_r \leqslant \delta/2. \qquad (2.9)$$

С помощью соотношений (1.10), (1.13) и (2.4) получаем неравенство

$$\| \mathbf{F}_N(\mathbf{u}_N^0) \| = \left\| S_N \left(\sum_{\nu=1}^{m} \omega_\nu \frac{\partial u_N^0(\varphi)}{\partial \varphi_\nu} - f(\varphi, u_N^0(\varphi), u_N^0(\varphi - \omega\Delta)) \right) \right\|_0 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{m} |\omega_\nu| N^{-(r-1)} \| u^0(\varphi) \|_r + 2s |f(\varphi, u, v)|_1 N^{-r} \| u^0(\varphi) \|_r \leqslant c_1 N^{-(r-1)},$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим множество векторов

$$D_{\delta_N} = \{\mathbf{u}_N \mid \| \mathbf{u}_N - \mathbf{u}_N^0 \| \leqslant \delta_N\}, \quad \delta_N = N^{-(m+1)/2}.$$

Пусть $u_N(\varphi)$ — произвольный полином, для которого соответствующий ему вектор $\mathbf{u}_N \in D_{\delta_N}$. Тогда с учетом (2.4) и неравенства

$$| u_{N+1} - u_N |_0 \leqslant \sum_{\|n\| \leqslant N+1} \| u_{N+1}^{(n)} - u_N^{(n)} \| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\| u_{N+1} - u_N \|_0^2} \sqrt{\sum_{\|n\| \leqslant N+1} 1} \leqslant 2^{m/2} (N+1)^{m/2} \| u_{N+1} - u_N \|_0$$

получаем оценку

$$\| u_N(\varphi) - u_N^0(\varphi) \| \leqslant | u_N(\varphi) - u_N^0(\varphi) |_0 \leqslant$$

$$\leqslant 2^{m/2} N^{m/2} \| u_N(\varphi) - u_N^0(\varphi) \|_0 \leqslant 2^{m/2} N^{-1/2} \leqslant \delta/2 \qquad (2.10)$$

для всех $N \geqslant N_0$, если выбрать N_0 достаточно большим. Из неравенства (2.10) следует, что $u_N(\varphi) \in D_\delta$, вектор-функция $\mathbf{F}_N(\mathbf{u}_N)$ определена и дважды непрерывно дифференцируема на множестве D_{δ_N}.

В дальнейшем через $J_N(\mathbf{u}_N)$ будем обозначать матрицу Якоби левой части уравнений (2.7): $J_N(\mathbf{u}_N) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u}_N)}{\partial \mathbf{u}_N}$. Выясним основные свойства этой матрицы.

Лемма 3.4 [28]. *Пусть выполнены условия леммы* 3.3. *Тогда матрица* $J_N(\mathbf{u}_N^0)$ *является невырожденной* и $\| J_N^{-1}(\mathbf{u}_N^0) \| \leqslant M$, *где* M — *постоянная величина.*

Доказательство. Пусть

$$w_N(\varphi) = \sum_{\|n\| \leqslant N} w_N^{(n)} e^{i(n,\varphi)} = \sum_{\|n\| \leqslant N} (w_{1N}^{(n)} \cos(n, \varphi) + w_{2N}^{(n)} \sin(n, \varphi)); \qquad (2.11)$$

$$v_N(\varphi) = \sum_{\|n\| \leqslant N} v_N^{(n)} e^{i(n,\varphi)} = \sum_{\|n\| \leqslant N} (v_{1,N}^{(n)} \cos(n, \varphi) + v_{2,N}^{(n)} \sin(n, \varphi)) \qquad (2.12)$$

и $\mathbf{w}_N$, $\mathbf{v}_N$ — соответствующие им $(s + 2sP(N))$-мерные векторы. Рассмотрим линейную систему

$$J_N(\mathbf{u}_N) \mathbf{w}_N = \mathbf{v}_N. \qquad (2.13)$$

Очевидно, что для выполнения равенства (2.13) необходимо и достаточно, чтобы для всех $\|n\| \leqslant N$ выполнялись равенства

$$\left(\frac{\partial}{\partial \vec{u}_N} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=1}^{m} \omega_\nu \frac{\partial u_N(\varphi)}{\partial \varphi_\nu} - f(\varphi, u_N(\varphi), u_N(\varphi - \omega\Delta))\right) \times \right.$$
$$\left. \times \cos(n, \varphi)\, d\varphi\right) \mathbf{w}_N = v_{1,N}^{(n)},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \vec{u}_N} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=1}^{m} \omega_\nu \frac{\partial u_N(\varphi)}{\partial \varphi_\nu} - f(\varphi, u_N(\varphi), u_N(\varphi - \omega\Delta))\right) \times \right.$$
$$\left. \times \sin(n, \varphi)\, d\varphi\right) \mathbf{w}_N = v_{2,N}^{(n)},$$

которые можно записать в виде

$$\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=1}^{m} \omega_\nu \frac{\partial}{\partial \varphi_\nu} \frac{\partial u_N(\varphi)}{\partial \mathbf{u}_N} \mathbf{w}_N - \frac{\partial f(\varphi, u_N(\varphi), u_N(\varphi - \omega\Delta))}{\partial u} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{\partial u_N(\varphi)}{\partial \mathbf{u}_N} \mathbf{w}_N - \frac{\partial f(\varphi, u_N(\varphi), u_N(\varphi - \omega\Delta))}{\partial y} \frac{\partial u_N(\varphi - \omega\Delta)}{\partial \mathbf{u}_N} \mathbf{w}_N\right) \times$$
$$\times \cos(n, \varphi)\, d\varphi = v_{1,N}^{(n)};$$

$$\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=1}^{m} \omega_\nu \frac{\partial}{\partial \varphi_\nu} \frac{\partial u_N(\varphi)}{\partial \mathbf{u}_N} \mathbf{w}_N - \frac{\partial f(\varphi, u_N(\varphi), \varphi_N(\varphi - \omega\Delta))}{\partial u} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{\partial u_N(\varphi)}{\partial \mathbf{u}_N} \mathbf{w}_N - \frac{\partial f(\varphi, u_N(\varphi), u_N(\varphi - \omega\Delta))}{\partial y} \frac{\partial u_N(\varphi - \omega\Delta)}{\partial \vec{u}_N} \mathbf{w}_N\right) \times$$
$$\times \sin(n, \varphi)\, d\varphi = v_{2,N}^{(n)}.$$

Введем в рассмотрение оператор

$$L(u) = L_1(u) + L_1^{\Delta}(u), \qquad (2.14)$$

где

$$L_1(u) = \sum_{\nu=1}^{m} \omega_\nu \frac{\partial u}{\partial \varphi_\nu} - \frac{\partial f(\varphi, u(\varphi), u(\varphi - \omega\Delta))}{\partial u};$$

$$L_1^{\Delta}(u) = -\frac{\partial f(\varphi, u(\varphi), u(\varphi - \omega\Delta))}{\partial y} \quad (y = u(\varphi - \omega\Delta)),$$

причем

$$L_1^{\Delta}(u)\, w(\varphi) = -\frac{\partial f(\varphi, u(\varphi), u(\varphi - \omega\Delta))}{\partial y} w(\varphi - \omega\Delta).$$

С учетом (2.5) равенство (2.13) можно представить в виде

$$S_N(L(u_N^0(\varphi))\, w_N(\varphi) = v_N(\varphi). \qquad (2.15)$$

Рассмотрим соответствующее системе (2.13) однородное уравнение

$$J_N(\mathbf{u}_N)\mathbf{w}_N = 0, \tag{2.16}$$

которое можно записать таким образом:

$$S_N(L(u^0(\varphi))w_N(\varphi)) = 0. \tag{2.17}$$

С учетом условий 3 леммы 3.2 из (2.17) получаем оценку

$$0 = (L(u_N^0(\varphi))w_N(\varphi), w_N(\varphi))_0 \geqslant$$

$$\geqslant \left(2\gamma_0 - \left|\frac{\partial f(\varphi, u_N^0(\varphi), u_N^0(\varphi - \omega\Delta))}{\partial y}\right|_0\right)\|w_N(\varphi)\|^2, \tag{2.18}$$

из которой следует, что уравнение (2.16) при $\mathbf{u}_N = \mathbf{u}_N^0$ имеет лишь тривиальное решение. Следовательно, матрица $J_N(\mathbf{u}_N^0)$ является невырожденной. Тогда при $\mathbf{u}_N = \mathbf{u}_N^0$ и любом $\mathbf{v}_N$ неоднородная система (2.15) всегда будет иметь единственное решение.

Для получения оценки матрицы $J_N^{-1}(\mathbf{u}_N)$ воспользуемся леммой 3.2. Из соотношения (2.15) получаем

$$(v_N(\varphi), w_N(\varphi))_0 = (L(u_N^0(\varphi)w_N(\varphi), w_N(\varphi))_0 \geqslant$$

$$\geqslant \left(2\gamma_0 - \left|\frac{\partial f(\varphi, u_N^0(\varphi), u_N^0(\varphi - \omega\Delta))}{\partial y}\right|_0\right)\|w_N(\varphi)\|^2, \tag{2.19}$$

откуда следует

$$\|w_N(\varphi)\|_0 \leqslant \left(2\gamma_0 - \left|\frac{\partial f(\varphi, u_N^0(\varphi), u_N^0(\varphi - \omega\Delta))}{\partial y}\right|_0\right)^{-1}\|v_N(\varphi)\|_0. \tag{2.20}$$

Из соотношения (2.13) находим $\mathbf{w}_N = J_N^{-1}(\mathbf{u}_N)\mathbf{v}_N$, поэтому неравенство (2.20) можно записать в виде

$$\|J_N^{-1}(\mathbf{u}_N)\mathbf{v}_N\| \leqslant \left(2\gamma_0 - \left|\frac{\partial f(\varphi, u_N^0(\varphi), u_N^0(\varphi - \omega\Delta))}{\partial y}\right|_0\right)^{-1}\|\mathbf{v}_N\|. \tag{2.21}$$

Из неравенства (2.21) следует $\|J_N^{-1}(\mathbf{u}_N)\| \leqslant M$, если положить

$$M = \left(2\gamma_0 - \left|\frac{\partial f(\varphi, u_N^0(\varphi), u_N^0(\varphi - \omega\Delta))}{\partial y}\right|_0\right)^{-1}.$$

Для разности $J_N(\mathbf{u}_N) - J_N(\mathbf{u}_N^0)$ имеет место следующее утверждение [28].

Лемма 3.5. *Пусть правая часть системы дифференциальных уравнений (2.1) удовлетворяет условиям леммы 3.3. Тогда для произвольного вектора* $\mathbf{u}_N \in D_{\delta_N}$, $0 < \varkappa < 1$ *и достаточно больших* $N \geqslant N_0$ *справедлива оценка*

$$\|J_N(\mathbf{u}_N) - J_N(\mathbf{u}_N^0)\| \leqslant \varkappa/M. \tag{2.22}$$

Доказательство. Для произвольного полинома

$$w_N(\varphi) = \sum_{\|n\| \leqslant N} w_N^{(n)} e^{i(n,\varphi)} = \sum_{\|n\| \leqslant N, n_i \geqslant 0} (c_N^{(n)} \cos(n,\varphi) + d_N^{(n)} \sin(n,\varphi))$$

составим соответствующий вектор $\mathbf{w}_N$. Тогда из (2.13) для разности $J_N(\mathbf{u}_N)\mathbf{w}_N - J_N(\mathbf{u}_N^0)\mathbf{w}_N$ получаем оценку

$$\|(J_N(\mathbf{u}_N) - J_N(\mathbf{u}_N^0))\mathbf{w}_N\| = \|S_N(L(u_N(\varphi)) - L(u_N^0(\varphi))\, w_N(\varphi)\| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \frac{\partial f(\varphi, u_N(\varphi), u_N(\varphi - \omega\Delta))}{\partial u} - \frac{\partial f(\varphi, u_N^0(\varphi), u_N^0(\varphi - \omega\Delta))}{\partial u} \right|_0 \|w_N(\varphi)\|_0 +$$

$$+ \left| \frac{\partial f(\varphi, u_N(\varphi), u_N(\varphi - \omega\Delta))}{\partial y} - \frac{\partial f(\varphi, u_N^0(\varphi), u_N^0(\varphi - \omega\Delta))}{\partial y} \right|_0 \times$$

$$\times \|w_N(\varphi - \omega\Delta)\|_0 \leqslant c_2 |f(\varphi, u, y)|_2 |u_N(\varphi) - u_N^0(\varphi)|_0 \|\mathbf{w}_N\|, \quad (2.23)$$

из которой следует

$$\|J_N(\mathbf{u}_N) - J_N(\mathbf{u}_N^0)\| \leqslant c_2 |f(\varphi, u, y)|_2 |u_N(\varphi) - u_N^0(\varphi)|_0. \quad (2.24)$$

С учетом неравенства (2.10) и выбора области D_{δ_N} из неравенства (2.24) получаем

$$\|J_N(\mathbf{u}_N) - J_N(\mathbf{u}_N^0)\| \leqslant c_3 N^{m/2} \|u_N(\varphi) - u_N^0(\varphi)\|_0 \leqslant c_4 N^{-1/2} \leqslant \varkappa/M \quad (2.25)$$

для всех достаточно больших N_0 и $N \geqslant N_0$.

Воспользовавшись теперь леммами 3.3.—3.5 и теоремой 2.1, докажем существование приближений Бубнова — Галеркина для системы дифференциальных уравнений (2.1) и сходимость этих приближений к точному квазипериодическому решению [28].

Теорема 3.3. *Пусть система дифференциальных уравнений (2.1) удовлетворяет условиям 1—3 леммы 3.3. Тогда существует достаточно большое число N_0 такое, что при $N \geqslant N_0$ уравнение (2.2) имеет единственное периодическое по φ решение $u^*(\varphi)$, для которого выполняется неравенство*

$$|u_N^0(\varphi) - u_N^*(\varphi)|_0 \leqslant c_5 N^{-r+m/2+1}. \quad (2.26)$$

Доказательство. Допустим, что $u^0(\varphi)$ — известное периодическое решение уравнения (2.2), $u_N^0(\varphi) = S_N u^0(\varphi)$ и $\mathbf{u}_N^0$ — соответствующий вектор. Тогда согласно лемме 3.3 в области

$$D_{\frac{\delta}{2}} = \{u \mid \|u(\varphi) - u^0(\varphi)\| \leqslant \delta/2\}$$

будет выполняться неравенство $\|\mathbf{F}_N(\mathbf{u}_N^0)\| \leqslant c_1 N^{-(r-1)}$, т. е. будет выполняться условие (1.8) теоремы 2.1 для $N \geqslant N_0$, где N_0 достаточно велико, если положить $l = l_N = c_1 N^{-(r-1)}$.

Выделим множество

$$\Omega_{\delta_N} = \{\mathbf{u}_N \mid \| \mathbf{u}_N - \mathbf{u}_N^0 \| \leqslant \delta_N\}, \quad \delta_N = N^{-(m+1)/2}.$$

Согласно леммам 3.4 и 3.5 всегда можно выбрать N_0 настолько большим, чтобы при $N \geqslant N_0$ для $\mathbf{F}_N(\mathbf{u}_N^0)$ выполнялись условия «б» и неравенство (1.8) теоремы 2.1. Выбирая N_0 из неравенства

$$\frac{Mc_g N_0^{-(r-1)}}{1-\varkappa} \leqslant N_0^{-(m+1)/2},$$

можно удовлетворить условию «в» теоремы 2.1. Следовательно, при любом $N \geqslant N_0$ существует решение уравнения (2.7) $\mathbf{u}_N^*$, а значит, и периодическое решение уравнения (2.2) $u_N^*(\varphi)$, для которого справедлива оценка

$$\| u_N^0(\varphi) - u_N^*(\varphi) \|_0 \leqslant \frac{Mc_1 N^{-(r-1)}}{1-\varkappa}. \tag{2.27}$$

С учетом соотношения (2.10) неравенство (2.27) принимает вид

$$| u_N^0(\varphi) - u_N^*(\varphi) |_0 \leqslant 2^{m/2} N^{m/2} \| u_N^0 - u_N^* \|_0 \leqslant cN^{-r+m/2+1},$$

что и требовалось доказать.

§ 3. ПОСТРОЕНИЕ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ МЕТОДОМ БУБНОВА — ГАЛЕРКИНА

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(\omega t, x(t), x(t-\Delta)), \tag{3.1}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$ — s-мерный вектор, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_s)$ — s-мерная вектор-функция, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)$ — базис частот. Предположим, что угловые координаты $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ и нормальные координаты $y_1, y_2, \ldots, y_s$ введены таким образом [83], что эта система может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= -a_0(\varphi(t), \varphi(t-\Delta), y(t), y(t-\Delta))\, y(t) - b_0(\varphi(t), \varphi(t-\Delta), \\ &\qquad y(t), y(t-\Delta))\, y(t-\Delta); \\ \frac{d\varphi(t)}{dt} &= \omega, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где a_0, b_0 — $(s \times s)$-мерные матрицы. Наряду с системой (3.2) рассмотрим возмущенную систему

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= -a(\varphi(t), \varphi(t-\Delta), y(t), y(t-\Delta))\, y(t) - b(\varphi(t), \varphi(t-\Delta), \\ &\qquad y(t), y(t-\Delta))\, y(t-\Delta) + c(\varphi(t), \varphi(t-\Delta)), \\ \frac{d\varphi(t)}{dt} &= \omega, \end{aligned} \tag{3.3}$$

в которой $a - a_0$, $b - b_0$, c — в некотором смысле малые величины. Согласно предыдущим рассуждениям очевидно, что вопрос существования квазипериодических решений системы (3.3) сводится к вопросу существования периодических решений системы уравнений в частных производных

$$L(u)u = \sum_{\nu=1}^{m} \omega_\nu \frac{\partial u(\varphi)}{\partial \varphi_\nu} + a(\varphi, \varphi - \omega\Delta, u(\varphi), u(\varphi - \omega\Delta))u(\varphi) +$$

$$+ b(\varphi, \varphi - \omega\Delta, u(\varphi), u(\varphi - \omega\Delta))u(\varphi - \omega\Delta) = c(\varphi, \varphi - \omega\Delta). \quad (3.4)$$

Покажем, что для построения периодических решений системы (3.4) можно применить метод Бубнова — Галеркина.

Предположим, что в системе (3.4) $(s \times s)$-мерные матрицы $a(\varphi, \psi, y, z)$, $b(\varphi, \psi, y, z)$, $(\psi = \varphi(t - \Delta)$, $z = y(t - \Delta))$ и s-мерная вектор-функция $c(\varphi, \psi)$ являются периодическими по φ, ψ с периодом 2π и $a(\varphi, \psi, y, z)$, $b(\varphi, \psi, y, z) \in C^r(\mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M}$ — область $\varphi \in \mathfrak{T}_m$, $\psi \in \mathfrak{T}_m$, $\|y\| = \left(\sum_{i=1}^{s} y_i^2\right)^{1/2} \leqslant d$, $\|z\| \leqslant d$, $c(\varphi, \psi) \in H^r(\mathfrak{T}_m \times \mathfrak{T}_m)$, $r > m/2 + 2$. Очевидно, что если ввести в $C^r(\mathfrak{M})$ норму

$$|f(\varphi, \psi, y, z)|_r = \max_{0 \leqslant \rho \leqslant r} |D^\rho f(\varphi, \psi, y, z)|_0,$$

где $D^\rho f$ — любая производная порядка ρ:

$$|f(\varphi, \psi, y, z)|_0 = \max_{\mathfrak{M}} \|f(\varphi, \psi, y, z)\|,$$

то $C^r(\mathfrak{M})$ обратится в банахово пространство.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$L = L_1 + L_\Delta^1, \quad (3.5)$$

где

$$L_1 u(\varphi) = \sum_{\nu=1}^{m} \omega_\nu \frac{\partial u(\varphi)}{\partial \varphi_\nu} + a(\varphi, \varphi - \omega\Delta)u(\varphi);$$

$$L_\Delta^1 u(\varphi) = b(\varphi, \varphi - \omega\Delta)u(\varphi - \omega\Delta);$$

$a(\varphi, \psi)$, $b(\varphi, \psi)$ — $(s \times s)$-мерные матрицы, принадлежащие классу $H^r(\mathfrak{T}_m \times \mathfrak{T}_m)$. Применив к $(L_\Delta^1 u, u)$ неравенство Шварца, получим

$$(L_\Delta^1 u, u)_r = (b(\varphi, \varphi - \omega\Delta)u(\varphi - \omega\Delta), u(\varphi))_r \geqslant$$

$$\geqslant -\|b(\varphi, \varphi - \omega\Delta)u(\varphi - \omega\Delta)\|_{r-s} \|u(\varphi)\|_{r+s},$$

откуда при $r = s = 0$ находим

$$(L_\Delta^1 u, u)_0 \geqslant -\|b(\varphi, \varphi - \omega\Delta)u(\varphi - \omega\Delta)\|_0 \|u(\varphi)\|_0 \geqslant$$

$$\geqslant -|b(\varphi, \varphi - \omega\Delta)|_0 \|u(\varphi - \omega\Delta)\|_0 \|u(\varphi)\|_0, \quad (3.6)$$

где
$$|b(\varphi, \varphi-\omega\Delta)|_0 = \max_{\|u\|_0=1} (bu, u)_0.$$
Поскольку
$$\|u(\varphi-\omega\Delta)\|_0^2 = \sum_n \langle u_\Delta^{(n)}, u_\Delta^{(-n)}\rangle = \sum_n \langle e^{i(n,\omega)\Delta} u^{(n)}, e^{-i(n,\omega,\Delta} u^{(1-n)}\rangle =$$
$$= \sum_n \langle u^{(n)}, u^{(-n)}\rangle = \|u(\varphi)\|_0^2,$$
то неравенство (3.6) можно представить в виде
$$(L_\Delta^1 u, u)_0 \geqslant -|b(\varphi, \psi)|_0 \|u_0\|^2. \tag{3.7}$$
Аналогично можно показать, что выполняется неравенство
$$(L_\Delta^1 u, u)_r \geqslant -c_r |b(\varphi, \psi)|_r \|u(\varphi)\|_r^2. \tag{3.8}$$
Для оператора L, определяемого выражением (3.5), имеет место следующее утверждение, аналогичное лемме 3.2.

Лемма 3.6. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям:*

1) $a(\varphi, \psi), b(\varphi, \psi) \in C^r(\mathfrak{T}_m \times \mathfrak{T}_m)$;

2) существуют числа c_r, γ_0, γ_1 *такие, что для любого вектора* $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s)$, $\|\eta\| = 1$, *выполняются неравенства*
$$\langle a(\varphi, \psi)\eta, \eta\rangle \geqslant 2\gamma_0, \quad \gamma_0 > 0;$$
$$|b(\varphi, \psi)|_0 < \gamma_0; \quad 2c_r|b(\varphi, \psi)|_r < \gamma_1.$$
Тогда для любой функции $u(\varphi) \in H^0(\mathfrak{T}_m)$ *справедливо неравенство*
$$(Lu, u)_0 \geqslant (2\gamma_0 - |b(\varphi, \psi)|_0)\|u\|_0^2 \tag{3.9}$$
и для $u(\varphi) \in H^r(\mathfrak{T}_m) \cap C^2(\mathfrak{T}_m)$, $|u(\varphi)|_2 < 1$, *— неравенство*
$$(Lu, u)_r \geqslant (2\gamma_1 - c_r|b(\varphi, \psi)|_r)\|u\|_r^2 - \delta_1(1 + \|a(\varphi, \psi)\|_r)^2, \tag{3.10}$$
где постоянные γ_1, δ_1 *зависят от* $|a|_r$ *и не зависят от* $u(\varphi)$.

Наряду с системой уравнений (3.4) рассмотрим систему
$$L(\varepsilon u)u = \sum_{\nu=1}^m \omega_\nu \frac{\partial u(\varphi)}{\partial \varphi_\nu} + a(\varphi, \varphi-\omega\Delta, \varepsilon u(\varphi), \varepsilon u(\varphi-\omega\Delta))u(\varphi) +$$
$$+ b(\varphi, \varphi-\omega\Delta, \varepsilon u(\varphi), \varepsilon u(\varphi-\omega\Delta))u(\varphi-\omega\Delta) = c(\varphi, \varphi-\omega\Delta), \tag{3.11}$$
которая легко получается из (3.4) заменой соответственно u, c на εu, εc, где ε — малый положительный параметр. Обозначим $w_N(\varphi) = \sum_{\|n\|<N} w_N^{(n)} e^{i(n,\varphi)}$ и составим систему уравнений для приближений Галеркина
$$S_N(L(\varepsilon w_N(\varphi))w_N(\varphi)) = S_N c(\varphi, \psi). \tag{3.12}$$

Существование периодических решений системы уравнений (3.11) устанавливает следующее утверждение [52, 53, 73].

Теорема 3.4. *Пусть для оператора $L(\varepsilon u)$ выполняются такие условия:*

1) $a(\varphi, \psi, y, z)$, $b(\varphi, \psi, y, z) \in C^r(\mathfrak{M})$, $c(\varphi, \psi) \in H^r(\mathfrak{T}_m \times \mathfrak{T}_m)$, *где* $r > m/2 + 2$;

2) существуют положительные числа c_r, γ_0, γ_1 *такие, что для любого вектора* $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s)$, $\|\eta\| = 1$, *выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} &\langle a(\varphi, \psi, 0, 0)\eta, \eta\rangle \geqslant 2\gamma_0, \ \gamma_0 > 0; \\ &|b(\varphi, \psi, 0, 0)|_0 < \gamma_0, \quad 2c_r|b(\varphi, \psi, 0, 0)|_r < \gamma_1. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Тогда существуют положительные числа ε_0, K, c_0 *такие, что если* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\|c(\varphi, \psi)\|_r \leqslant K$, *то система уравнений* (*3.12*) *имеет решение при всех* $N \geqslant 1$. *Это решение находится с помощью итерационного процесса*

$$S_N(L(\varepsilon w_N^{j-1}(\varphi))w_N^j(\varphi)) = S_N c(\varphi, \psi), \quad w_N^0 = 0, \quad j = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.14}$$

Последовательность $w_N(\varphi)$ *при* $N \to \infty$ *сходится по норме пространства* $C^k(\mathfrak{T}_m)$, $k = [r - m/2 - 2] \geqslant 1$, *к функции* $u^0(\varphi)$, *которая является классическим решением уравнения* (*3.11*), *причем скорость сходимости определяется неравенством*

$$|u^0(\varphi) - w_N(\varphi)|_0 \leqslant c_0 N^{-(r-1)}\|c\|_r. \tag{3.15}$$

Доказательство. Рассмотрим вначале свойства линейного оператора $L(\varepsilon w)$, предполагая, что $w(\varphi) \in C^\infty(\mathfrak{T}_m)$, $|w(\varphi)|_2 < 1$ и $L(0)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.4. Пусть $|\varepsilon w(\varphi)|_0 \leqslant d$. Тогда

$$\begin{aligned} &|a(\varphi, \varphi - \omega\Delta, \varepsilon w(\varphi), \varepsilon w(\varphi - \omega\Delta)) - a(\varphi, \varphi - \omega\Delta, 0, 0)|_0 \leqslant 2\varepsilon s|a|_1; \\ &|b(\varphi, \varphi - \omega\Delta, \varepsilon w(\varphi), \varepsilon w(\varphi - \omega\Delta)) - b(\varphi, \varphi - \omega\Delta, 0, 0)|_0 \leqslant 2\varepsilon s|b|_1, \end{aligned} \tag{3.16}$$

и при достаточно малом ε_0 будут выполняться неравенства

$$\begin{aligned} &\langle a(\varphi, \varphi - \omega\Delta, \varepsilon w(\varphi), \varepsilon w(\varphi - \omega\Delta))\eta, \eta\rangle \geqslant 2\gamma_0, \quad \gamma_0 > 0; \\ &|b(\varphi, \varphi - \omega\Delta, \varepsilon w(\varphi), \varepsilon w(\varphi - \omega\Delta))|_0 < \gamma_0; \\ &2c_r|b(\varphi, \varphi - \omega\Delta, \varepsilon w(\varphi), \varepsilon w(\varphi - \omega\Delta))|_r < \gamma_1. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Отсюда следует, что оператор $L(\varepsilon w(\varphi))$ удовлетворяет условиям леммы 3.6, т. е. для всех $u(\varphi) \in H^r(\mathfrak{T}_m) \cap C^2(\mathfrak{T}_m)$, $|u(\varphi)|_2 < 1$ верны оценки

$$(L(\varepsilon w(\varphi))u, u)_0 \geqslant (2\gamma_0 - |b|_0)\|u\|_0^2; \tag{3.18}$$

$$(L(\varepsilon w(\varphi))u, u)_r \geqslant (2\gamma_1 - c_r|b|_r)\|u\|_r^2 - \delta_1(1 + \|a\|_r), \tag{3.19}$$

причем γ_0, γ_1, δ_1 не зависят от $w(\varphi)$ и $u(\varphi)$.

Согласно лемме 3.1 существуют постоянные $c_1>0$, $c_2>0$, не зависящие от a, b, w и такие, что выполняются неравенства

$$\begin{aligned}&\| a(\varphi, \varphi-\omega\Delta, \varepsilon w(\varphi), \varepsilon w(\varphi-\omega\Delta))\|_r \leqslant c_1 |a|_r (1+\varepsilon\|w\|_r);\\ &\| b(\varphi, \varphi-\omega\Delta, \varepsilon w(\varphi), \varepsilon w(\varphi-\omega\Delta))\|_r \leqslant c_2 |b|_r (1+\varepsilon\|w\|_r),\end{aligned} \tag{3.20}$$

в силу которых неравенство (3.19) можно представить в виде

$$(L(\varepsilon w(\varphi))u, u)_r \geqslant$$

$$\geqslant (2\gamma_1 - c_2 c_r |b|_r (1+\varepsilon\|w(\varphi)\|_r))\|u\|_r^2 - \delta_2(1+\varepsilon\|w(\varphi)\|_r)^2, \tag{3.21}$$

причем δ_2 не зависит от $w(\varphi)$, $u(\varphi)$.

Предположим теперь, что тригонометрический полином $w_N^{j-1}(\varphi)$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\begin{aligned}&\| w_N^{j-1}\|_0 \leqslant \frac{\|c(\varphi, \psi)\|_0}{2\gamma_0 - |b|_0};\\ &\| w_N^{j-1}\|_r \leqslant \delta\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{j-1}}\right) < 2\delta;\\ &\| w_N^{j-1}\|_r < 1,\end{aligned} \tag{3.22}$$

где

$$\delta = 3\sqrt{\frac{\delta_2}{2\gamma_l - |b_0|}}.$$

Покажем теперь, что система (3.14) всегда разрешима относительно $w_N^j(\varphi)$. Для этого убедимся в том, что при $S_N c(\varphi, \psi)=0$ она имеет лишь тривиальное решение. Умножая скалярно (3.14) на $w_N^j(\varphi)$, получаем

$$S_N(L(\varepsilon w_N^{j-1})w_N^j, w_N^j)_0 = (S_N c(\varphi, \psi), w_N^j)_0.$$

Оператор S_N по нулевому скалярному произведению является самосопряженным, поэтому

$$(L(\varepsilon w_N^{j-1})w_N^j, S_N w_N^j)_0 = (c(\varphi, \psi), S_N w_N^j)_0,$$

и, поскольку оператор S_N для тригонометрических полиномов $w_N^j(\varphi)$ является тождественным,

$$(L(\varepsilon w_N^{j-1})w_N^j, w_N^j)_0 = (c(\varphi, \psi), w_N^j)_0. \tag{3.23}$$

Так как оператор $L(\varepsilon w_N^{j-1})$ в силу неравенств (3.22) удовлетворяет неравенствам (3.18), (3.19), то из (3.23) при $c(\varphi, \psi)=0$ получается неравенство

$$0 = S_N(L(\varepsilon w_N^{j-1})w_N^j, w_N^j)_0 = (L(\varepsilon w_N^{j-1})w_N^j, w_N^j)_0 \geqslant (2\gamma_0 - |b|_0)\|w_N^j\|_0^2,$$

откуда $w_N^j = 0$. Следовательно, система (3.14) разрешима для любой правой части, поэтому в силу неравенства (3.18) и неравенства Шварца имеет место оценка

$$(2\gamma_0 - |b|_0)\|w_N^j(\varphi)\|_0^2 \leqslant (L(\varepsilon w_N^{j-1}(\varphi))w_N^j(\varphi), w_N^j(\varphi))_0 =$$
$$= (c(\varphi, \psi), w_N^j(\varphi))_0 \leqslant \|c(\varphi, \psi)\|_0 \|w_N^j(\varphi)\|_0, \tag{3.24}$$

из которой следует

$$\|w_N^j(\varphi)\|_0 \leqslant \frac{\|c(\varphi, \psi)\|_0}{2\gamma_0 - |b|_0}. \tag{3.25}$$

Аналогично, из (3.19) и неравенства Шварца находим

$$(2\gamma_1 - c_2c_r|b|_r(1 + \varepsilon\|w_N^{j-1}(\varphi)\|_r))\|w_N^j(\varphi)\|_r^2 -$$
$$- \delta_2(1 + \varepsilon\|w_N^{j-1}(\varphi)\|_r)^2 \leqslant \|c\|_r \|w_N^j(\varphi)\|_r, \tag{3.26}$$

откуда при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \leqslant 1/2\delta$ и соответствующем выборе следует оценка

$$\|w_N^j\|_r \leqslant \frac{\|c\|_r + \sqrt{\|c\|_r^2 + 4(2\gamma_1 - c_2c_r|b|_r(1 + \varepsilon\|w_N^j\|_r)\delta_2(1 + \varepsilon\|w_N^{j-1}\|_r^2)}}{2(2\gamma_1 - c_2c_r|b|_r(1 + \varepsilon\|w_N^{j-1}\|_r))} \leqslant$$
$$\leqslant \delta(1 + \varepsilon\|w_N^{j-1}\|_r) \leqslant \delta\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2\delta}\right) < 2\delta.$$

Согласно теореме 3.1 и неравенству (1.8) получаем

$$|w_N^j(\varphi)|_2 \leqslant c_3\|w_N^j(\varphi)\|_{r-1} \leqslant 2c_3\|w_N^j(\varphi)\|_0^{1-(r-1)/r}\|w_N^j(\varphi)\|_r^{(r-1)/r} \leqslant$$
$$\leqslant 2c_3\left(\frac{\|c(\varphi, \psi)\|_0}{2\gamma_0 - |b|_0}\right)^{1/r}(2\delta)^{(r-1)/r} \leqslant 1 \tag{3.27}$$

при достаточно малом $\|c(\varphi, \psi)\|$. Таким образом, неравенства (3.22) всегда справедливы для всех $j = 1, 2, 3, \ldots$

Докажем сходимость последовательности $\{w_N^j(\varphi)\}$ при $j \to \infty$. Из соотношения (3.14) находим

$$S_N(L(\varepsilon w_N^j)w^{j+1}) - S_N(L(\varepsilon w_N^{j-1})w_N^j) = S_N(L(\varepsilon w_N^j)w_N^{j+1}) -$$
$$- S_N(L(\varepsilon w_N^j)w_N^j) + S_N(L(\varepsilon w_N^j)w_N^j) - S_N(L(\varepsilon w_N^{j-1})w_N^j) =$$
$$= S_N(L(\varepsilon w_N^j)(w_N^{j+1} - w_N^j)) = S_N((L(\varepsilon w_N^{j-1}) - L(\varepsilon w_N^j))w_N^j). \tag{3.28}$$

Обозначив $v_N^{j+1} = w_N^{j+1} - w_N^j$, соотношение (3.28) можно представить в виде

$$S_N(L(\varepsilon w_N^j)v_N^{j+1}) = S_N((L(\varepsilon w_N^{j-1}) - L(\varepsilon w_N^j))w_N^j). \tag{3.29}$$

Оценивая (3.29) с учетом неравенства (3.18), получаем оценку

$$\|v_N^{j+1}\|_0 \leqslant \frac{\|S_N((L(\varepsilon w_N^{j-1}) - L(\varepsilon w_N^j))w_N^j\|_0}{2\gamma_0 - |b|_0} \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\left(\frac{|a(\varphi, \psi, 0, 0)|_0 + |b(\varphi, \psi, 0, 0)|_0}{2\gamma_0 - |b|_0}\right)\|w_N^j\|_0. \tag{3.30}$$

Из этого неравенства следует, что при достаточно малых ε_0 последовательность $\{w_N^j\}$ при $j \to \infty$ является фундаментальной в $H^0(\mathfrak{T}_m)_0$. Таким образом, решение уравнения (3.12) существует при всяком $N \geqslant 1$ и имеют место оценки

$$\| w_N(\varphi) \|_r \leqslant 2\delta; \quad \| w_N(\varphi) \|_0 \leqslant \frac{\| c(\varphi, \psi) \|_0}{2\gamma_0 - | b |_0}; \quad | w_N(\varphi) |_2 < 1.$$

Докажем теперь сходимость последовательности $\{w_N(\varphi)\}$ в $H^0(\mathfrak{T}_m)$ при $N \to \infty$. Из уравнения (3.12) имеем

$$S_{N+1}(L(\varepsilon w_{N+1}) w_{N+1}) - S_N(L(\varepsilon w_N) w_N) \equiv S_{N+1}(L(\varepsilon w_{N+1}) w_{N+1}) -$$
$$- S_{N+1}(L(\varepsilon w_{N+1}) w_N) + S_{N+1}(L(\varepsilon w_{N+1}) w_N) - S_{N+1}(L(\varepsilon w_N) w_N) +$$
$$+ S_{N+1}(L(\varepsilon w_N) w_N) - S_N(L(\varepsilon w_N) w_N) \equiv S_{N+1}(L(\varepsilon w_{N+1})(w_{N+1} - w_N)) +$$
$$+ S_{N+1}(L(\varepsilon w_{N+1}) - L(\varepsilon w_N)) w_N) + (S_{N+1} - S_N)(L(\varepsilon w_N) w_N) =$$
$$= (S_{N+1} - S_N) c(\varphi, \psi). \tag{3.31}$$

Из (3.31) находим

$$S_{N+1}(L(\varepsilon w_{N+1})(w_{N+1} - w_N)) = - S_{N+1}(L(\varepsilon w_{N+1}) -$$
$$- L(\varepsilon w_N)) w_N + (S_{N+1} - S_N)(c(\varphi, \psi) - L(\varepsilon w_N) w_N), \tag{3.32}$$

откуда следует, что $w_{N+1} - w_N$ есть приближение Галеркина для неоднородного уравнения с правой частью α, равной правой части соотношения (3.32). Поэтому с учетом оценки (3.22) справедливо неравенство

$$\| w_{N+1} - w_N \|_0 \leqslant \frac{\| \alpha \|_0}{2\gamma_0 - | b |_0}. \tag{3.33}$$

Оценим теперь $\| \alpha \|_0$:

$$\| S_{N+1}(L(\varepsilon w_{N+1}) - L(\varepsilon w_N)) w_N \|_0 \leqslant$$
$$\leqslant c \| (L(\varepsilon w_{N+1}) - L(\varepsilon w_N)) w_N \|_0 \leqslant \varepsilon c_4 \| w_{N+1} - w_N \|_0. \tag{3.34}$$

Согласно неравенствам (1.11), (1.13), (1.14) получаем оценку

$$\| (S_{N+1} - S_N)(c(\varphi, \psi) - L(\varepsilon w_N) w_N) \|_0 \leqslant$$
$$\leqslant c_5 N^{-(r-1)} \| c(\varphi, \psi) - L(\varepsilon w_N) w_N \|_{r-1} \leqslant c_5 N^{-(r-1)} \times$$
$$\times [\| c(\varphi, \psi) \|_{r-1} + c_6 \| c(\varphi, \psi) \|_r] \leqslant c_7 N^{-(r-1)}. \tag{3.35}$$

С учетом (3.34) и (3.35) неравенство (3.33) можно представить в виде

$$\| w_{N+1}(\varphi) - w_N(\varphi) \|_0 \leqslant \varepsilon c_8 \| w_{N+1}(\varphi) - w_N(\varphi) \|_0 + c_9 N^{-(r-1)};$$

тогда при достаточно малом ε окончательно получаем

$$\| w_{N+1}(\varphi) - w_N(\varphi) \|_0 \leqslant 2c_9 N^{-(r-1)}. \tag{3.36}$$

Неравенство (3.36) свидетельствует о сходимости последовательности $\{w_N(\varphi)\}$ при $N \to \infty$ в $H^0(\mathfrak{T}_m)$, поскольку $r > m/2 + 2$. Согласно теореме 3.2 последовательность $\{w_N(\varphi)\}$ компактна в $H^{r-1}(\mathfrak{T}_m)$. Кроме того, она является сходящейся в $H^{r-1}(\mathfrak{T}_m)$, так как в противном случае существовали бы две подпоследовательности в $H^{r-1}(\mathfrak{T}_m)$, $w_{N_j}(\varphi)$ и $w_{N_{j1}}(\varphi)$, сходящиеся в $H^{r-1}(\mathfrak{T}_m)$ соответственно к двум различным функциям $w^0(\varphi)$ и $w_1^0(\varphi)$. Поскольку из доказанного выше следует, что коэффициенты Фурье этих функций совпадают, то $\{w_N(\varphi)\}$ сходится в $H^{r-1}(\mathfrak{T}_m)$. Применяя теорему 3. 1, убеждаемся, что эта последовательность сходится в $C^k(\mathfrak{T}_m)$, $k = [r - 2 - m/2] \geqslant 1$

Оценим теперь скорость сходимости приближений Бубнова—Галеркина. Допустим, что приближения $w_N(\varphi)$ определены из соотношений

$$S_N(L(\varepsilon w_N(\varphi)) w_N(\varphi)) = S_N c(\varphi, \psi) \tag{3.37}$$

и последовательность $\{w_N(\varphi)\}$ сходится к некоторой функции $w^0(\varphi) \in H^{r-1}(\mathfrak{T}_m)$. Оценим разность $w_N(\varphi) - w^0(\varphi)$. Для функции $f(\varphi) = \sum_n f^{(n)} e^{i(n,\varphi)}$ обозначим $R_N f = \sum_{\|n\| > N} f^{(n)} e^{i(n,\varphi)}$. Тогда

$$R_n = E - S_N \tag{3.38}$$

и верна оценка

$$\| R_n f \|_s \leqslant N^{s-r} \| f \|_r, \quad s \leqslant r. \tag{3.39}$$

Поскольку $w^0(\varphi)$ — решение уравнения (3.11), то

$$L(\varepsilon w^0(\varphi)) w^0(\varphi) = c(\varphi, \psi), \tag{3.40}$$

и из (3.37), (3.40) с учетом (3.38) получаем равенство

$$L(\varepsilon w^0(\varphi)) w^0(\varphi) - L(\varepsilon w_N(\varphi)) w_N(\varphi) = R_N c(\varphi, \psi) - \\ - R_n L(\varepsilon w_N(\varphi)) w_N(\varphi),$$

или

$$L(\varepsilon w^0(\varphi))(w^0(\varphi) - w_N(\varphi)) = R_N c(\varphi, \psi) - R_n L(\varepsilon w_N(\varphi)) w_N(\varphi) + \\ + (L(\varepsilon w_N(\varphi)) - L(\varepsilon w^0(\varphi))) w_N(\varphi). \tag{3.41}$$

Умножив скалярно (3.41) на $w^0(\varphi) - w_N(\varphi)$, найдем

$$(L(\varepsilon w^0(\varphi))(w^0 - w_N), w^0 - w_N)_0 = R_n((c(\varphi, \psi) - L(\varepsilon w_N(\varphi)) w_N), \\ w^0 - w_N)_0 + ((L(\varepsilon w_N(\varphi)) - L(\varepsilon w^0(\varphi))) w_N), w^0 - w_N)_0. \tag{3.42}$$

Применяя к соотношению (3.42) неравенство (3.18) и неравенство Шварца, а также учитывая оценку (3.39), получаем

$$(2\gamma_0 - |b|_0)\| w^0(\varphi) - w_N(\varphi)\|_0^2 \leqslant N^{-(r-1)} \| c(\varphi, \psi)\|_{r-1} + \\ + \| L(\varepsilon w_N(\varphi) w_N)\| \| w^0(\varphi) - w_N(\varphi)\|_0 + \| L(\varepsilon w_N(\varphi)) - \\ - L(\varepsilon w^0(\varphi))\|_0 \| w_N(\varphi)\|_0 \| w^0(\varphi) - w_N(\varphi)\|_0. \quad (3.43)$$

Принимая во внимание ограниченность $w_N(\varphi)$, находим оценку

$$\| L(\varepsilon w_N(\varphi)) - L(\varepsilon w^0(\varphi))\|_0 \| w_N(\varphi)\|_0 \leqslant \varepsilon c_4 \| w^0(\varphi) - w_N(\varphi)\|_0. \quad (3.44)$$

Поскольку

$$\| L(\varepsilon w_N(\varphi)) w_N(\varphi)\|_{r-1} \leqslant c' \| w_N\|_r,$$

а

$$\| w_N(\varphi)\|_r \leqslant c'' \| c(\varphi, \psi)\|_r, \quad (3.45)$$

то неравенство (3.43) можно записать в виде

$$\| w^0(\varphi) - w_N(\varphi)\|_0 \leqslant \varepsilon c_8 \| w^0(\varphi) - w_N(\varphi)\|_0 + c_9 N^{-(r-1)} \| c\|_r. \quad (3.46)$$

При достаточно малом ε

$$\| w^0(\varphi) - w_N(\varphi)\|_0 \leqslant c_0 N^{-(r-1)} \| c(\varphi, \psi)\|_r. \quad (3.47)$$

Аналогичным образом легко доказать, что

$$\| w^0(\varphi) - w_N(\varphi)\|_s \leqslant c_0 N^{s-(r-1)} \| c\|_r, \quad s > m/2 + 2.$$

Глава IV

СУЩЕСТВОВАНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ ТОРОИДАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ В ИХ ОКРЕСТНОСТЯХ

В данной главе излагаются результаты, относящиеся к исследованию инвариантных многообразий различных классов нелинейных систем с запаздыванием, а также касающиеся поведения траекторий нелинейных систем с запаздыванием в окрестности этих многообразий.

Отметим, что инвариантные многообразия систем с запаздыванием исследовались многими авторами [30, 79, 92, 134, 135, 146, 147]. В работах [113, 120, 121] предложен новый метод изучения инвариантных тороидальных многообразий — метод функции Грина задач об инвариантных торах. Этот метод не только позволяет доказать новые теоремы существования тороидальных многообразий для систем с запаздыванием, но и дает алгоритм их построения.

§ 1. СУЩЕСТВОВАНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ ТОРОИДАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ С ПОТЕРЕЙ ГЛАДКОСТИ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy(t)}{dt} = -b(\varphi(t), \varphi(t-\Delta), y(t), y(t-\Delta), \mu)\, y(t) - b_1(\varphi(t), \varphi(t-\Delta), y(t), y(t-\Delta), \mu)\, y(t-\Delta) + c(\varphi(t), \varphi(t-\Delta), \mu); \qquad (1.1)$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = a(\varphi(t), y(t), \mu),$$

где $y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$, $\varphi=(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$, a, b, b_1, c — периодические по φ, $\psi=\varphi(t-\Delta)$ с периодом 2π функции, определенные для всех y, $z=y(t-\Delta)$, μ, принадлежащих области

$$\|y\| = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2} \leqslant d, \quad \|z\| \leqslant d, \quad \mu \in [0, \mu_0]; \qquad (1.2)$$

Δ — постоянная величина, характеризующая запаздывание в системе; μ — малый положительный параметр.

Рассмотрим вопрос существования инвариантных торов системы (1.1), предполагая, что $c(\varphi, \psi, 0)=0$, т. е. что при $\mu=0$ систе-

ма (1.1) имеет инвариантный тор $y=0$. Инвариантное многообразие $\mathfrak{T}(\mu)$ системы (1.1) будем искать в виде

$$y = u(\varphi, \mu), \tag{1.3}$$

где $u(\varphi, \mu)$ — непрерывная периодическая по φ с периодом 2π функция.

Пусть $\varphi_t = \varphi_t(\varphi)$, $\varphi_\tau(\varphi) = \varphi$ — решение системы уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi, u(\varphi, \mu), \mu), \tag{1.4}$$

где τ, φ — произвольные постоянные, $u(\varphi, \mu)$ — некоторая периодическая по φ с периодом 2π функция. Функция $u(\varphi, \mu)$ будет определять инвариантное многообразие системы уравнений (1.1), если для всех $-\infty<t<\infty$ выполняется тождество

$$\frac{du(\varphi_t, \mu)}{dt} \equiv -b(\varphi_t, \varphi_{t-\Delta}, u(\varphi_t, \mu), u(\varphi_{t-\Delta}, \mu), \mu)\, u(\varphi_t, \mu) -$$

$$- b_1(\varphi_t, \varphi_{t-\Delta}, u(\varphi_t, \mu), u(\varphi_{t-\Delta}, \mu), \mu)\, u(\varphi_{t-\Delta}, \mu) + c(\varphi_t, \varphi_{t-\Delta}, \mu). \tag{1.5}$$

Для отыскания тора $\mathfrak{T}(\mu)$ применим итерационный метод, позволяющий находить $\mathfrak{T}(\mu)$ как предел последовательности торов $\mathfrak{T}^0(\mu) = \mathfrak{T}(0)$, $\mathfrak{T}^2(\mu)$, ..., $\mathfrak{T}^i(\mu)$, каждый из которых является инвариантным тором

$$\mathfrak{T}^{i+1}(\mu) : y = u^{i+1}(\varphi, \mu), \quad i = 0, 1, ..., \tag{1.6}$$

соответствующей системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy(t)}{dt} = -b(\varphi(t), \varphi(t-\Delta), u^i(\varphi(t), \mu), u^i(\varphi(t-\Delta), \mu), \mu)\, y(t) -$$

$$- b_1(\varphi(t), \varphi(t-\Delta), u^i(\varphi(t), \mu), u^i(\varphi(t-\Delta), \mu), \mu)\, u^i(\varphi(t-\Delta), \mu) +$$

$$+ c(\varphi(t), \varphi(t-\Delta), \mu). \tag{1.7}$$

Возможность находить $\mathfrak{T}(\mu)$ таким путем обосновывает [65]

Лемма 4.1. *Пусть функции* $a(\varphi, y, \mu)$, $b(\varphi, \psi, y, z, \mu)$, $b_1(\varphi, \psi, y, z, \mu)$, $c(\varphi, \psi, \mu)$ *являются непрерывными по* φ, ψ, y, z *при* $\|y\| \leqslant d$, $\|z\| \leqslant d$, $\mu \in [0, \mu_0]$ *и периодическими по* φ, ψ *с периодом* 2π, *тогда при равномерной сходимости последовательности* (1.6) *для любого* $\mu \in [0, \mu_0]$ *предельная функция* $u = \lim_{i\to\infty} u^i(\varphi, \mu)$ *определяет инвариантный тор* $\mathfrak{T}(\mu)$: $y = u(\varphi, \mu)$ *системы* (1.1).

Доказательство. Поскольку $y = u^{i+1}(\varphi, \mu)$ — инвариантный тор системы (1.7), то для траекторий φ_t^i, y_t^i, лежащих на нем, выполняются соотношения

$$\varphi_t^i = \varphi + \int_\tau^t a(\varphi_t^i, u^i(\varphi_t^i, \mu), \mu)\, dt;$$

$$
\begin{aligned}
u^{i+1}(\varphi_t^i, \mu) = u^{i+1}(\varphi, \mu) + \int_{\tau}^{t} [&-b(\varphi_t^i, \varphi_{t-\Delta}^i, u^i(\varphi_t^i, \mu); \\
&u^i(\varphi_{t-\Delta}^i, \mu), \mu)\, u^{i+1}(\varphi_t^i, \mu) - b_1(\varphi_t^i, \varphi_{t-\Delta}^i, u^i(\varphi_t^i, \mu); \\
&u^i(\varphi_{t-\Delta}^i, \mu), \mu)\, u^i(\varphi_{t-\Delta}^i, \mu) + c(\varphi_t^i, \varphi_{t-\Delta}^i, \mu)]\, dt.
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

Из этих соотношений в силу неравенства $\|u^i\| \leqslant d$, периодичности и непрерывности функции $a(\varphi, y, \mu)$ при $\|y\| \leqslant d$ следует равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность последовательности φ_t^i, $i=0, 1, \ldots$, для t из любого конечного отрезка T вещественной прямой $R: -\infty < t < \infty$. Последовательность φ_t^i содержит, следовательно, равномерно сходящуюся на T подпоследовательность $\varphi_t^{i_k}$, $k=1, 2, \ldots$ Если обозначить через φ_t предел этой подпоследовательности:

$$
\varphi_t = \lim_{k \to \infty} \varphi_t^{i_k} \qquad (t \in T) \tag{1.9}
$$

и перейти в равенствах (1.8) к пределу при $i=i_k$, так как предположение о непрерывности функций a, b, b_1, c и u^i обеспечивает законность всех перестановок предела, то получим тождества

$$
\varphi_t = \varphi + \int_{\tau}^{t} a(\varphi_t, u(\varphi_t, \mu), \mu)\, dt \qquad (t \in T);
$$

$$
\begin{aligned}
u(\varphi_t, \mu) \equiv u(\varphi, \mu) + \int_{\tau}^{t} [&-b(\varphi_t, \varphi_{t-\Delta}, u(\varphi_t, \mu); \\
&u(\varphi_{t-\Delta}, \mu), \mu)\, u(\varphi_t, \mu) - b_1(\varphi_t, \varphi_{t-\Delta}, u(\varphi_t, \mu); \\
&u(\varphi_{t-\Delta}, \mu), \mu)\, u(\varphi_{t-\Delta}, \mu) + c(\varphi_t, \varphi_{t-\Delta}, \mu)]\, dt.
\end{aligned} \tag{1.10}
$$

Из них следует, что на любом конечном интервале T, а следовательно, для всех $t \in (-\infty, \infty)$ непрерывная периодическая функция $u(\varphi, \mu)$ удовлетворяет системе уравнений (1.4), (1.5) и поэтому многообразие $y = u(\varphi, \mu)$ является инвариантным тором системы (1.1).

Таким образом, вопрос существования инвариантного тора системы (1.1) связан с вопросом существования инвариантного тора системы (1.7).

Найдем условия, при которых для системы (1.7) существует инвариантный тор. С этой целью рассмотрим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
\frac{dy(t)}{dt} = &-b(\varphi_t(\varphi), \varphi_{t-\Delta}(\varphi), u^i(\varphi_t(\varphi), \mu), u^i(\varphi_{t-\Delta}(\varphi), \mu), \mu)\, y(t) - \\
&- b_1(\varphi_t(\varphi), \varphi_{t-\Delta}(\varphi), u^i(\varphi_t(\varphi), \mu), u^i(\varphi_{t-\Delta}(\varphi), \mu), \mu)\, u^i(\varphi_{t-\Delta}(\varphi), \mu) + \\
&+ c(\varphi_t(\varphi), \varphi_{t-\Delta}(\varphi), \mu),
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

где $u^i(\varphi, \mu)$ — заданная периодическая по φ с периодом 2π функция $\varphi_t(\varphi) = \varphi_t^i(\varphi)$, $(\varphi_0(\varphi) = \varphi)$ — общее решение первого уравнения системы (1.7).

Обозначим через $G^i(t, \tau, \varphi, \mu)$ функцию Грина задачи об ограниченных решениях системы (1.11), предполагая, что она существует. Тогда соотношение

$$y_t(\varphi, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} G^i(t, \tau, \varphi, \mu)\, c_1(\varphi_\tau(\varphi), \varphi_{\tau-\Delta}(\varphi), \mu)\, d\tau, \tag{1.12}$$

где

$$c_1(\varphi_t(\varphi), \varphi_{t-\Delta}(\varphi), \mu) = c(\varphi_t(\varphi), \varphi_{t-\Delta}(\varphi), \mu) - b_1(\varphi_t(\varphi), \varphi_{t-\Delta}(\varphi),$$
$$u^i(\varphi_t(\varphi), \mu), u^i((\varphi_{t-\Delta}, \varphi), \mu), \mu)\, u^i(\varphi_{t-\Delta}(\varphi), \mu),$$

определяет семейство ограниченных решений системы уравнений (1.11), зависящее от φ и μ как от параметров. Эти решения заполняют инвариантное множество

$$\mathfrak{T}^{i+1}(\mu) : y = u^i(\varphi, \mu) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} G^i(0, \tau, \varphi, \mu)\, c_1(\varphi_\tau(\varphi), \varphi_{t-\Delta}(\varphi), \mu)\, d\tau, \tag{1.13}$$

являющееся инвариантным тороидальным множеством системы уравнений (1.7).

Функцию $G^i(0, \tau, \varphi, \mu)$, определяющую согласно (1.13) инвариантное множество $y = u^{i+1}(\varphi, \mu)$ системы уравнений (1.11), назовем функцией Грина для задачи об инвариантных торах системы (1.7).

Свойства гладкости по φ и μ этой функции обеспечат гладкость инвариантных торов $\mathfrak{T}^i(\mu)$, а малость разности между функциями Грина для системы (1.10) при $i = k + 1$ и $i = k$ приводит к сходимости последовательности торов $\mathfrak{T}^i(\mu)$ при $i \to \infty$. Определим ее общий вид.

Пусть имеется система уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi, \mu), \qquad \frac{dy}{dt} = -b(\varphi, \mu)\, y.$$

Обозначим через $\Omega_\tau^t(\varphi, \mu)$ фундаментальную матрицу решений линейной системы

$$\frac{dy}{dt} = -b(\varphi_t(\varphi, \mu), \mu)\, y,$$

в которой $\varphi_t(\varphi, \mu)$ — решение первого уравнения рассматриваемой системы, $\varphi_0(\varphi, \mu) = \varphi$, $\Omega_\tau^\tau(\varphi, \mu) = E$, E — единичная матрица. Пусть $\varphi_t(\varphi, \mu)$ — однозначная функция переменных t, φ при всех действительных t и φ. Тогда $\varphi_t(\varphi, \mu)$ будет периодической по каждому $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ с периодом 2π.

Рассмотрим функцию

$$G_0(\tau, \varphi, \mu) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi, \mu)\, c_1(\varphi_\tau(\varphi, \mu), \varphi_{\tau-\Delta}(\varphi, \mu), \mu) & \text{при } \tau < 0, \\ \Omega_\tau^0(\varphi, \mu)\,(c_1(\varphi_\tau(\varphi, \mu), \varphi_{\tau-\Delta}(\varphi, \mu), \mu) - E) & \text{при } \tau > 0, \end{cases}$$

где $c_1(\varphi_t, \varphi_{t-\Delta}, \mu)$ — периодическая по φ_t, $\varphi_{t-\Delta}$ с периодом 2π матрица. Предположим, что матрица $G_0(\tau, \varphi, \mu)$ такова, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \| G_0(\tau, \varphi, \mu) \| \, d\tau < K < \infty.$$

Тогда функция

$$G(t, \tau, \varphi, \mu) = \begin{cases} \Omega_\tau^t(\varphi, \mu)\, c_1(\varphi_\tau(\varphi, \mu), \varphi_{\tau-\Delta}(\varphi, \mu), \mu) & \text{при } \tau < 0, \\ \Omega_\tau^t(\varphi, \mu)\, c_1(\varphi_\tau(\varphi, \mu), \varphi_{\tau-\Delta}(\varphi, \mu), \mu) - E & \text{при } \tau > 0 \end{cases}$$

является функцией Грина для задачи об ограниченных решениях системы

$$\frac{dy}{dt} = -b(\varphi_t(\varphi, \mu), \mu)\, y + c_1(\varphi_t(\varphi, \mu), \varphi_{t-\Delta}(\varphi, \mu), \mu).$$

Таким образом, $G_0(\tau, \varphi, \mu) = G(0, \tau, \varphi, \mu)$ — функция Грина для задачи об инвариантных торах и функция $G_0(\tau, \varphi, \mu)$ — функция Грина рассматриваемой задачи, если $G_0(\tau, \varphi, \mu)$ — периодическая функция φ с периодом 2π и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \| G_0(\tau, \varphi, \mu) \| \, d\tau \leqslant K < \infty.$$

Рассмотрим теперь вопрос существования последовательности торов (1.6). В системе уравнений

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = a_0(\varphi(t)) + a_1(\varphi(t)); \tag{1.14}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -[b_0(\varphi(t), \varphi(t-\Delta)) + b_1^0(\varphi(t), \varphi(t-\Delta))]\, y(t) + \\ + c_0(\varphi(t), \varphi(t-\Delta))$$

a_0, b_0, a_1, b_1^0, $c_0 \in C^r(\mathfrak{T}_m \times \mathfrak{T}_m : 0 \leqslant \varphi_i \leqslant 2\pi,\ 0 < \psi_i \leqslant 2\pi,\ i = 1, \ldots, m)$, a_0, b_0 — фиксированные, a_1, b_1^0, c_0 — произвольные, но малые в смысле нормы в $C^r(\mathfrak{T}_m \times \mathfrak{T}_m)$ функции.

Лемма 4.2 [64]. *Предположим, что система уравнений* (1.14) *такова, что найдутся целое r и положительные M, γ, K такие, что при всех $a_1(\varphi)$, $b_1^0(\varphi, \psi)$, удовлетворяющих неравенству*

$$\max\{|a_1|_r, |b_1^0|_r\} \leqslant M, \tag{1.15}$$

где $|b_1^0|_r = \max\limits_{|u|_r=1} |b_1^0 u|_r$, *система уравнений* (1.14) *имеет функцию Грина задачи об инвариантных торах $G_0(\tau, \varphi)$, удовлетворяющую для каждого $\tau \in (-\infty, \infty)$ условию*

$$|G_0(\tau, \varphi)\, c_0(\varphi_\tau(\varphi), \varphi_{\tau-\Delta}(\varphi))|_r \leqslant K e^{-\gamma|\tau|} |c_0(\varphi, \psi)|_r. \tag{1.16}$$

Тогда система уравнений (1.14) *имеет инвариантный тор $\mathfrak{T} : u = u(\varphi)$, для которого верна оценка*

$$|u(\varphi)|_r \leqslant \frac{2K}{\gamma} |c_0(\varphi, \psi)|_r. \tag{1.17}$$

Применим приведенную лемму для построения последовательности торов (1.6). Для этого поступим следующим образом. Положим

$$a_0(\varphi) = a(\varphi, 0, 0);$$
$$b_0(\varphi, \psi) = b(\varphi, \psi, 0, 0, 0);$$
$$a^1(\varphi, y, \mu) = a(\varphi, y, \mu) - a(\varphi, 0, 0); \tag{1.18}$$
$$b^1(\varphi, \psi, y, z, \mu) = b(\varphi, \psi, y, z, \mu) - b(\varphi, \psi, 0, 0, 0)$$

и будем предполагать, что $c(\varphi, \psi, \mu)$, $a(\varphi, y, \mu)$, $b(\varphi, \psi, y, z, \mu)$, $b_1(\varphi, \psi, y, z, \mu) \in C^r(\mathfrak{M})$ для всех $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0$, $\mathfrak{M}$ — область $\|y\| \leqslant d$, $\|z\| \leqslant d$, $(\varphi, \psi) \in \mathfrak{T}_m \times \mathfrak{T}_m$. Предположим также, что верны неравенства

$$\max_{\mu} \{|a^1(\varphi, y, \mu)|_r, \ |b^1(\varphi, \psi, y, z, \mu)|_r, \ |c(\varphi, \psi, \mu)|_r\} \leqslant L_r(d, \mu_0); \tag{1.19}$$

$$\frac{2K}{\gamma} |b_1|_r \leqslant R,$$

где $L_r(d, \mu_0)$ — положительная монотонно убывающая функция одного из аргументов при фиксированном значении другого, обладающая свойствами: $L_r(d, \mu_0) \to 0$ при $d \to 0$, $\mu_0 \to 0$, $R < 1$.

Существование последовательности торов (1.6) устанавливает

Теорема 4.1 [63, 67]. *Пусть функции $a_0(\varphi)$, $b_0(\varphi, \psi)$ такие, что система (1.14) удовлетворяет условиям леммы 4.2. Тогда можно указать такое μ^0, $0 \leqslant \mu^0 \leqslant \mu_0$, чтобы при $\mu \leqslant \mu^0$ последовательность систем (1.7) определяла последовательность инвариантных торов (1.6), каждый из которых принадлежит пространству $C^r(\mathfrak{T}_m)$ и удовлетворяет неравенству*

$$|u^i(\varphi, \mu)|_r \leqslant \frac{2L_r(0, \mu^0) K}{\gamma(1 - R)} \leqslant d. \tag{1.20}$$

Доказательство. Поскольку $u^0 = 0$, то теорема 4.1 верна для $i = 0$. Предположим, что она выполняется для $i = k$, и покажем, что инвариантный тор $\mathfrak{T}^{i+1}(\mu) : y = u^{k+1}(\mu)$ существует и удовлетворяет неравенству (1.20). Для этого, полагая в (1.8) $i = k$, для тора $y = u^{k+1}(\varphi, \mu)$ получаем систему

$$\frac{d\varphi_t^k}{dt} = a(\varphi_t^k, u^k(\varphi_t^k, \mu), \mu);$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -b(\varphi_t^k, \varphi_{t-\Delta}^k, u^k(\varphi_t^k, \mu), u^k(\varphi_{t-\Delta}^k, \mu), \mu)\, y(t) - \tag{1.21}$$

$$-b_1(\varphi_t^k, \varphi_{t-\Delta}^k, u^k(\varphi_t^k, \mu), u^k(\varphi_{t-\Delta}^k, \mu), \mu)\, u^k(\varphi_{t-\Delta}^k, \mu) + c(\varphi_t^k, \varphi_{t-\Delta}^k, \mu).$$

Перепишем теперь соотношения (1.21) в виде

$$\frac{d\varphi_t^k}{dt} = a_0(\varphi_t^k) + a^1(\varphi_t^k, u^k(\varphi_t^k, \mu), \mu);$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -[b_0(\varphi_t^k, \varphi_{t-\Delta}^k) + b^1(\varphi_t^k, \varphi_{t-\Delta}^k, u^k(\varphi_t^k, \mu), u^k(\varphi_{t-\Delta}^k, \mu), \mu)] \times$$
$$\times y(t) + c_1(\varphi_t^k, \varphi_{t-\Delta}^k, u^k(\varphi_t^k, \mu), u^k(\varphi_{t-\Delta}^k, \mu), \mu). \tag{1.22}$$

В силу того что функции a^1, b^1 удовлетворяют неравенству (1.19), а $u^k(\varphi, \mu)$ — неравенству (1.20), при достаточно малом μ^0 для всех $\mu \leqslant \mu^0$ выполняется неравенство

$$\max_{\mu} \{|a^1(\varphi_t^k, u^k(\varphi_t^k, \mu), \mu)|_r; \quad |b^1(\varphi_t^k, \varphi_{t-\Delta}^k, u^k(\varphi_t^k, \mu),$$
$$u^k(\varphi_{t-\Delta}^k, \mu), \mu)|_r\} \leqslant 2L_r\left(\frac{2L_r(0, \mu^0) K}{\gamma(1-R)}, \mu_0\right). \tag{1.23}$$

Так как $L_r(0, \mu^0) \to 0$ при $\mu^0 \to 0$, то μ^0 всегда можно считать настолько малым, чтобы кроме неравенства (1.23) выполнялись неравенства

$$2L_r\left(\frac{2L_r(0, \mu^0) K}{\gamma(1-R)}, \mu^0\right) \leqslant M; \tag{1.24}$$
$$\frac{2L_r(0, \mu^0) K}{\gamma(1-R)} \leqslant d.$$

При таком выборе μ^0 для всех $\mu \leqslant \mu^0$ к системе (1.22) можно применить лемму, согласно которой существует тор $\mathfrak{T}^{k+1}(\mu)$: $y = u^{k+1}(\varphi, \mu)$, причем для него верна оценка

$$|u^{k+1}(\varphi, \mu)|_r \leqslant \frac{2K}{\gamma} |c_1(\varphi, \psi, z, \mu)|_r \leqslant \frac{2K}{\gamma} [|c|_r + |b_1|_r |u^k|_r],$$
$$\mu \leqslant \mu^0. \tag{1.25}$$

Поскольку $|c(\varphi, \psi, \mu|_r \leqslant L_r(0, \mu_0)$, то из неравенства (1.25) следует оценка (1.20).

Проиллюстрируем характер выбора μ^0 для случая $r=0$, предполагая, что функция $a(\varphi, y, \mu)$, $b(\varphi, \psi, y, z, \mu)$ непрерывно дифференцируемы по аргументам φ, ψ, y, z, μ в области $(\varphi, \psi) \in \mathfrak{T}_m \times \mathfrak{T}_m$, $\|y\| \leqslant d$, $\|z\| \leqslant d$, $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0$. Поскольку

$$\max_{\mu \in [0, \mu_0]} \{|a'(\varphi, y, \mu)|_0, |b'(\varphi, \psi, y, z, \mu)|_0\} \leqslant$$
$$\leqslant \max_{\mu \in [0, \mu_0]} \{|a(\varphi, y, \mu) - a(\varphi, 0, \mu)|_0 + |a(\varphi, 0, \mu) - a(\varphi, 0, 0)|_0;$$
$$|b(\varphi, \psi, y, z, \mu) - b(\varphi, \psi, 0, z, \mu)|_0 + |b(\varphi, \psi, 0, z, \mu) - b(\varphi, \psi, 0, 0, \mu)|_0 +$$
$$+ |b(\varphi, \psi, 0, 0, \mu) - b(\varphi, \psi, 0, 0, 0)|_0\} \leqslant \max\left\{l|a|_1 d + \max_{\mu \in [0, \mu_0]}\left|\frac{\partial a}{\partial \mu}\right|\mu;\right.$$
$$\left.2l|b|_1 d + \max_{\mu \in [0, \mu_0]}\left|\frac{\partial b}{\partial \mu}\right|\mu\right\} \leqslant l_1(d + \mu_0), \tag{1.26}$$

где l_1 — некоторая положительная постоянная, то в этом случае

$$L_0(d, \mu_0) = l_1(d + \mu_0). \tag{1.27}$$

Тогда неравенство (1.23) принимает вид

$$\max_{\mu}\{|a'(\varphi_t^k, u^k(\varphi_t^k, \mu), \mu)|_0; \quad |b'(\varphi_t^k, \varphi_{t-\Delta}^k, u^k(\varphi_t^k, \mu),$$
$$u^k(\varphi_{t-\Delta}^k, \mu), \mu)|_0\} \leqslant l_1\left(\frac{2Kl_1\mu^0}{\gamma(1-R)} + \mu_0\right) \tag{1.28}$$

и выполняется согласно (1.20), (1.26) для любого μ^0. Поэтому выбор μ^0 следует определять из неравенств (1.24), которые при $r=0$ имеют простой вид

$$l_1\left(\frac{2Kl_1\mu^0}{\gamma(1-R)} + \mu^0\right) = c_1\mu^0 \leqslant M, \tag{1.29}$$
$$\frac{2Kl_1\mu^0}{\gamma(1-R)} = c_2\mu^0 \leqslant d$$

и удовлетворяются, если

$$\mu^0 \leqslant \min\left\{\frac{M}{c_1}; \ \frac{d}{c_2}\right\}. \tag{1.30}$$

Докажем теперь сходимость последовательности инвариантных торов (1.7) по норме пространства $C^{r-1}(\mathfrak{T}_m)$ при $r \geqslant 1$. Так как функция $u^{k+1}(\varphi, \mu)$ определяет гладкое многообразие системы (1.8) при $i=k$, то она удовлетворяет тождеству

$$\frac{du^{k+1}(\varphi_t^k, \mu)}{dt} \equiv \frac{\partial u^{k+1}(\varphi_t^k, \mu)}{\partial \varphi_t^k} a(\varphi_t^k, u^k(\varphi_t^k, \mu), \mu) \equiv$$
$$\equiv -b(\varphi_t^k, \varphi_{t-\Delta}^k, u^k(\varphi_t^k, \mu), u^k(\varphi_{t-\Delta}^k, \mu), \mu)\, u^{k+1}(\varphi_t^k, \mu) -$$
$$- b_1(\varphi_t^k, \varphi_{t-\Delta}^k, u^k(\varphi_t^k, \mu), u^k(\varphi_{t-\Delta}^k, \mu), \mu)\, u^k(\varphi_{t-\Delta}^k, \mu) + c(\varphi_t^k, \varphi_{t-\Delta}^k, \mu), \tag{1.31}$$

которое при $t=0$ принимает вид

$$\frac{\partial u^{k+1}(\varphi, \mu)}{\partial \varphi} a(\varphi, u^k(\varphi, \mu), \mu) \equiv -b(\varphi, \varphi_{-\Delta}^k(\varphi), u^k(\varphi, \mu),$$
$$u^k(\varphi_{-\Delta}^k(\varphi), \mu), \mu)\, u^{k+1}(\varphi, \mu) - b_1(\varphi, \varphi_{-\Delta}^k(\varphi), u^k(\varphi, \mu),$$
$$u^k(\varphi_{-\Delta}^k(\varphi), \mu), \mu)\, u^k(\varphi_{-\Delta}^k(\varphi), \mu) + c(\varphi, \varphi_{-\Delta}^*(\varphi), \mu),$$

где $\varphi_{-\Delta}^k(\varphi) = \varphi_t^k(\varphi)|_{t=-\Delta}$, $\varphi_0^k(\varphi) = \varphi$. Положим $u^{k+1}(\varphi, \mu) - u^k(\varphi, \mu) = w^{k+1}(\varphi, \mu)$. Тогда для $w^{k+1}(\varphi, \mu)$ получим тождество

$$\frac{\partial w^{k+1}(\varphi, \mu)}{\partial \varphi} a(\varphi, u^k(\varphi, \mu), \mu) + \frac{\partial u^k(\varphi, \mu)}{\partial \varphi}[a(\varphi, u^k(\varphi, \mu), \mu) -$$
$$- a(\varphi, u^{k-1}(\varphi, \mu), \mu)] \equiv -b(\varphi, \varphi_{-\Delta}^k(\varphi), u^k(\varphi, \mu), u^k(\varphi_{-\Delta}^k(\varphi), \mu), \mu) \times$$
$$\times w^{k+1}(\varphi, \mu) + [b(\varphi, \varphi_{-\Delta}^k(\varphi), u^k(\varphi, \mu), u^k(\varphi_{-\Delta}^k(\varphi), \mu), \mu) -$$
$$- b(\varphi, \varphi_{-\Delta}^{k-1}(\varphi), u^{k-1}(\varphi, \mu), u^{k-1}(\varphi_{-\Delta}^{k-1}(\varphi), \mu), \mu)]\, u^k(\varphi, \mu) -$$

$$- b_1(\varphi, \varphi^k_{-\Delta}(\varphi), u^k(\varphi, \mu), u^k(\varphi^k_{-\Delta}(\varphi), \mu), \mu)\, u^k(\varphi^k_{-\Delta}(\varphi), \mu) +$$
$$+ b_1(\varphi, \varphi^{k-1}_{-\Delta}(\varphi), u^{k-1}(\varphi, \mu), u^{k-1}(\varphi^{k-1}_{-\Delta}(\varphi), \mu), \mu)\, u^{k-1}(\varphi^{k-1}_{-\Delta}(\varphi), \mu) +$$
$$+ c(\varphi, \varphi^k_{-\Delta}(\varphi), \mu) - c(\varphi, \varphi^{k-1}_{-\Delta}(\varphi), \mu). \qquad (1.32)$$

Перепишем его в виде

$$\frac{\partial w^{k+1}(\varphi, \mu)}{\partial \varphi} a(\varphi, u^k(\varphi, \mu), \mu) + b(\varphi, \varphi^k_{-\Delta}(\varphi), u^k(\varphi, \mu),$$
$$u^k(\varphi^k_{-\Delta}(\varphi), \mu), \mu)\, w^{k+1}(\varphi, \mu) = \frac{\partial u^k(\varphi, \mu)}{\partial \varphi} [a(\varphi, u^{k-1}(\varphi, \mu), \mu) -$$
$$- a(\varphi, u^k(\varphi, \mu), \mu)] + [b(\varphi, \varphi^k_{-\Delta}(\varphi), u^k(\varphi, \mu), u^k(\varphi^k_{-\Delta}(\varphi), \mu), \mu) -$$
$$- b(\varphi, \varphi^{k-1}_{-\Delta}(\varphi), u^k(\varphi, \mu), u^k(\varphi^k_{-\Delta}(\varphi), \mu), \mu)]\, u^k(\varphi, \mu) +$$
$$+ [b(\varphi, \varphi^{k-1}_{-\Delta}(\varphi), u^k(\varphi, \mu), u^k(\varphi^k_{-\Delta}(\varphi), \mu), \mu) -$$
$$- b(\varphi, \varphi^{k-1}_{-\Delta}(\varphi), u^{k-1}(\varphi, \mu), u^k(\varphi^k_{-\Delta}(\varphi), \mu), \mu)]\, u^k(\varphi, \mu) +$$
$$+ [b(\varphi, \varphi^{k-1}_{-\Delta}(\varphi), u^{k-1}(\varphi, \mu), u^k(\varphi^k_{-\Delta}(\varphi), \mu), \mu) -$$
$$- b(\varphi, \varphi^{k-1}_{-\Delta}(\varphi), u^{k-1}(\varphi, \mu), u^{k-1}(\varphi^k_{-\Delta}(\varphi), \mu), \mu)]\, u^k(\varphi, \mu) +$$
$$+ [b(\varphi, \varphi^{k-1}_{-\Delta}(\varphi), u^{k-1}(\varphi, \mu), u^{k-1}(\varphi^k_{-\Delta}(\varphi), \mu), \mu) - b(\varphi, \varphi^{k-1}_{-\Delta}(\varphi),$$
$$u^{k-1}(\varphi, \mu), u^{k-1}(\varphi^{k-1}_{-\Delta}(\varphi), \mu), \mu)]\, u^k(\varphi, \mu) + b_1(\varphi, \varphi^k_{-\Delta}(\varphi), u^k(\varphi, \mu),$$
$$u^k(\varphi^k_{-\Delta}(\varphi), \mu), \mu)\,(u^{k-1}(\varphi^k_{-\Delta}(\varphi), \mu) - u^k(\varphi^k_{-\Delta}(\varphi), \mu)) +$$
$$+ b_1(\varphi, \varphi^{k-1}_{-\Delta}(\varphi), u^{k-1}(\varphi, \mu),$$
$$u^{k-1}(\varphi^{k-1}_{-\Delta}(\varphi), \mu), \mu)\,(u^{k-1}(\varphi^{k-1}_{-\Delta}(\varphi), \mu) - u^{k-1}(\varphi^k_{-\Delta}(\varphi), \mu)) +$$
$$+ [b_1(\varphi, \varphi^{k-1}_{-\Delta}(\varphi), u^{k-1}(\varphi, \mu), u^{k-1}(\varphi^{k-1}_{-\Delta}(\varphi), \mu), \mu) -$$
$$- b_1(\varphi, \varphi^k_{-\Delta}(\varphi), u^{k-1}(\varphi, \mu), u^{k-1}(\varphi^{k-1}_{-\Delta}(\varphi), \mu), \mu)]\, u^{k-1}(\varphi^k_{-\Delta}(\varphi), \mu) +$$
$$+ [b_1(\varphi, \varphi^k_{-\Delta}(\varphi), u^{k-1}(\varphi, \mu), u^{k-1}(\varphi^{k-1}_{-\Delta}(\varphi), \mu), \mu) -$$
$$- b_1(\varphi, \varphi^k_{-\Delta}(\varphi), u^k(\varphi, \mu), u^{k-1}(\varphi^{k-1}_{-\Delta}(\varphi), \mu), \mu)]\, u^{k-1}(\varphi^k_{-\Delta}(\varphi), \mu) +$$
$$+ [b_1(\varphi, \varphi^k_{-\Delta}(\varphi), u^k(\varphi, \mu), u^{k-1}(\varphi^{k-1}_{-\Delta}(\varphi), \mu), \mu) -$$
$$- b_1(\varphi, \varphi^k_{-\Delta}(\varphi), u^k(\varphi, \mu), u^k(\varphi^{k-1}_{-\Delta}(\varphi), \mu), \mu)]\, u^{k-1}(\varphi^k_{-\Delta}(\varphi), \mu) +$$
$$+ [b_1(\varphi, \varphi^k_{-\Delta}(\varphi), u^k(\varphi, \mu), u^k(\varphi^{k-1}_{-\Delta}(\varphi), \mu), \mu) -$$
$$- b_1(\varphi, \varphi^k_{-\Delta}(\varphi), u^k(\varphi, \mu), u^k(\varphi^k_{-\Delta}(\varphi), \mu), \mu)]\, u^{k-1}(\varphi^k_{-\Delta}(\varphi), \mu) +$$
$$+ c(\varphi, \varphi^k_{-\Delta}(\varphi), \mu) - c(\varphi, \varphi^{k-1}_{-\Delta}(\varphi), \mu).$$

Обозначим через $c_k(\varphi, \mu)$ правую часть последнего тождества, тогда

$$\frac{\partial w^{k+1}(\varphi, \mu)}{\partial \varphi}[a(\varphi, 0, 0) + (a(\varphi, u^k(\varphi, \mu), \mu) - a(\varphi, 0, 0)] +$$
$$+ [b(\varphi, \varphi^k_{-\Delta}(\varphi), 0, 0, 0) + (b(\varphi, \varphi^k_{-\Delta}(\varphi), u^k(\varphi, \mu), u^k(\varphi^k_{-\Delta}(\varphi), \mu), \mu) -$$
$$- b(\varphi, \varphi^k_{-\Delta}(\varphi), 0, 0, 0)] w^{k+1}(\varphi, \mu) = c_k(\varphi, \mu). \qquad (1.33)$$

Из (1.33) следует, что $y = w^{k+1}(\varphi, \mu)$ является инвариантным тором системы

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi, 0, 0,) + (a(\varphi, u^k(\varphi, \mu), \mu) - a(\varphi, 0, 0)); \qquad (1.34)$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = -[b(\varphi, \varphi^k_{-\Delta}(\varphi), 0, 0, 0) + (b(\varphi, \varphi^k_{-\Delta}(\varphi), u^k(\varphi, \mu),$$
$$u^k(\varphi^k_{-\Delta}(\varphi), \mu), \mu) - b(\varphi, \varphi^k_{-\Delta}(\varphi), 0, 0, 0))] y(t) + c_k(\varphi, \mu).$$

В силу того, что (1.34) имеет вид системы (1.22), $y = w^{k+1}(\varphi, \mu)$ можно записать через функцию Грина задачи об инвариантных торах системы (1.34):

$$y = w^{k+1}(\varphi, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} G^k_0(\tau, \varphi) c_k(\varphi_\tau(\varphi), \mu) d\tau,$$

причем для $\mu \leqslant \mu^0$ в силу неравенства (1.17) выполняется оценка

$$w^{k+1}(\varphi, \mu)|_0 \leqslant \frac{2K}{\gamma} |c_k(\varphi, \mu)|_0.$$

Учитывая вид функции $c_k(\varphi, \mu)$, для $w^{k+1}(\varphi, \mu)$ получаем оценку

$$|w^{k+1}(\varphi, \mu)|_0 \leqslant \frac{2K}{\gamma}\{l|u^k|_1|a|_1|w^k(\varphi, \mu)|_0 + l|u^k|_0|b|_1|\varphi^k_{-\Delta}(\varphi) -$$
$$- \varphi^{k-1}_{-\Delta}(\varphi)|_0 + 2l|u^k|_0|b|_1|w^k(\varphi, \mu)|_0 + l|b|_1|u^{k-1}|_1|u^k|_0 \times$$
$$\times |\varphi^k_{-\Delta}(\varphi) - \varphi^{k-1}_{-\Delta}(\varphi)|_0 + |b_1|_0|w^k(\varphi, \mu)|_0 + l|b_1|_0 + |u^{k-1}|_1|\varphi^k_{-\Delta}(\varphi) -$$
$$- \varphi^{k-1}_{-\Delta}(\varphi)|_0 + l|b_1|_1|u^{k-1}|_0|\varphi^k_{-\Delta}(\varphi) - \varphi^{k-1}_{-\Delta}(\varphi)|_0 + 2l|b_1|_1|u^{k-1}|_0 \times$$
$$\times |w^k(\varphi, \mu)|_0 + l^2|b_1|_1|u^{k-1}|_0|u_k|_1|\varphi^k_{-\Delta}(\varphi) - \varphi^{k-1}_{-\Delta}(\varphi)|_0 +$$
$$+ l|c|_1|\varphi^k_{-\Delta}(\varphi) - \varphi^{k-1}_{-\Delta}(\varphi)|_0\}. \qquad (1.35)$$

Оценим теперь разность $\varphi^k_{-\Delta}(\varphi) - \varphi^{k-1}_{-\Delta}(\varphi)$. С учетом первого из соотношений (1.8) находим

$$\varphi^k_t - \varphi^{k-1}_t = \int_0^t [a(\varphi^k_t, u^k(\varphi^k_t, \mu), \mu) - a(\varphi^{k-1}_t, u^{k-1}(\varphi^{k-1}_t, \mu), \mu)] dt, \qquad (1.36)$$

откуда

$$|\varphi_t^k-\varphi_t^{k-1}|_0\leqslant\int_0^{|t|}|a(\varphi_t^k,u^k(\varphi_t^k,\mu),\mu)-a(\varphi_t^{k-1},u^{k-1}(\varphi_t^{k-1},\mu),\mu)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{|t|}[|a(\varphi_t^k,u^k(\varphi_t^k,\mu),\mu)-a(\varphi_t^{k-1},u^k(\varphi_t^k,\mu),\mu)|+$$

$$+|a(\varphi_t^{k-1},u^k(\varphi_t^k,\mu),\mu)-a(\varphi_t^{k-1},u^{k-1}(\varphi_t^k,\mu),\mu)|+$$

$$+|a(\varphi_t^{k-1},u^{k-1}(\varphi_t^k,\mu),\mu)-a(\varphi_t^{k-1},u^{k-1}(\varphi_t^{k-1},\mu),\mu)|]\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{|t|}[l\,|a|_1\,|\varphi_t^k-\varphi_t^{k-1}|_0+l\,|a|_1\,|u^k-u^{k-1}|_0+$$

$$+l^2\,|a|_1\,|u^{k-1}|_1\,l\,\varphi_t^k-\varphi_t^{k-1}|_0]\,dt\leqslant l\,|a|_1\,|w^k(\varphi,\mu)|_0\,|t|+$$

$$+k_1\int_0^{|t|}|\varphi_t^k-\varphi_t^{k-1}|_0\,dt,\tag{1.37}$$

где $k_1=l\,|a|_1(1+ld)$. Из неравенства (1.37) следует

$$|\varphi_{-\Delta}^k-\varphi_{-\Delta}^{k-1}|_0\leqslant\frac{1}{1+ld}|w^k(\varphi,\mu)|_0(e^{k_1\Delta}-1).\tag{1.38}$$

учетом (1.38) неравенство (1.35) можно представить в виде

$$|w^{k+1}(\varphi,\mu)|_0\leqslant\frac{2K}{\gamma}\Big\{ld\,|a|_1+\frac{l\,|b|_1\,d}{1+ld}(e^{k_1\Delta}-1)+$$

$$+2l\,|b|_1\,d+\frac{l^2\,|b|_1\,d^2}{1+ld}(e^{k_1\Delta}-1)+|b_1|_0+\frac{l\,|b_1|_0\,d}{1+ld}(e^{k_1\Delta}-1)+$$

$$+2l\,|b_1|_1\,d+\frac{l^2\,|b_1|_1\,d^2}{1+ld}(l^{k_1\Delta}-1)+\frac{l\,|c|}{1+ld}(e^{k_1\Delta}-1)\Big\}|w^k(\varphi,\mu)|_0.\tag{1.39}$$

С помощью оценок (1.23) и (1.25) из неравенства (1.39) находим

$$|w^{k+1}(\varphi,\mu)|_0\leqslant\rho_0\,|w^k(\varphi,\mu)|_0\leqslant\rho_0^{k-1}\,|u^1(\varphi,\mu)|_0\leqslant\rho_0^{k-1}\,\frac{2K}{\gamma}\,|c(\varphi,\psi,\mu)|_0,\tag{1.40}$$

где ρ_0 — положительная константа, меньшая единицы при малых μ. Из последнего неравенства следует сходимость последовательности инвариантных торов (1.6) в пространстве $C^0(\mathfrak{T}_m)$ и непрерывность предельной функции по μ в точке $\mu=0$.

Положим

$$\lim_{k\to\infty}u^k(\varphi,\mu)=u(\varphi,\mu)\tag{1.41}$$

и покажем, что $u(\varphi, \mu) \in C^{r-1}(\mathfrak{T}_m)$. Используя свойство равномерной ограниченности последовательности функций $\{D^\rho u^k(\varphi, \mu)\}$, составленной из частных производных порядка $\rho \leqslant r-1$ от функций $u^k(\varphi, \mu)$ из равномерной непрерывности этой последовательности, согласно лемме Арцела заключаем, что любая бесконечная подпоследовательность последовательности $\{D^\rho u^k(\varphi, \mu)\}$ равномерно сходится к некоторой функции $D^\rho u(\varphi, \mu)$. Последнее с учетом соотношения (1.41) показывает, что $u(\varphi, \mu)$ имеет непрерывные производные порядка $\rho \leqslant r-1$.

Из леммы 4.1 и сходимости последовательности $\{u^k(\varphi, \mu)\}$ в $C^{r-1}(\mathfrak{T}_m)$ вытекает следующая теорема существования инвариантного тора у возмущенной системы (1.1) [63].

Теорема 4.2. *Предположим, что правая часть системы*

$$\frac{dy(t)}{dt} = -b(\varphi(t), \varphi(t-\Delta), y(t), y(t-\Delta), \mu)\, y(t) - b_1(\varphi(t), \varphi(t-\Delta), y(t), y(t-\Delta), \mu)\, y(t-\Delta) + c(\varphi(t), \varphi(t-\Delta), \mu); \qquad (1.42)$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = a(\varphi(t), y(t), \mu)$$

удовлетворяет условиям:

1) для всех $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0$

$$a(\varphi, y, \mu),\ b(\varphi, \psi, y, z, \mu),\ b_1(\varphi, \psi, y, z, \mu),\ c(\varphi, \psi, \mu) \in C^r(\mathfrak{M}),$$

где $\mathfrak{M}$ *— область* $\|y\| \leqslant d$, $\|z\| \leqslant d$, $\varphi \in \mathfrak{T}_m$, $\psi \in \mathfrak{T}_m$;

2) $\max\limits_{\mu} \{|a(\varphi, y, \mu) - a(\varphi, 0, 0)|_r;\ |b(\varphi, \psi, y, z, \mu) - b(\varphi, \psi, 0, 0, 0)|_r,$
$|c(\varphi, \psi, \mu)|_r\} \leqslant L_r(d, \mu_0);$

$$\frac{2K}{\gamma}|b_1|_r \leqslant R,$$

где $L_r(d, \mu_0)$ *— положительная монотонно убывающая функция одного из своих аргументов при фиксированном значении другого, обладающая свойствами:* $L_r(d, \mu_0) \to 0$ *при* $d \to 0$, $\mu_0 \to 0$; $R < 1$;

3) для любых достаточно малых по норме $C^r(\mathfrak{T}_m \times \mathfrak{T}_m)$ *функций* $a_1(\varphi)$, $b_1^0(\varphi)$, $c_0(\varphi, \psi)$ *система уравнений*

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = a(\varphi(t), 0, 0) + a_1(\varphi(t)); \qquad (1.43)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -[b(\varphi(t), \varphi(t-\Delta), 0, 0, 0) + b_1^0(\varphi(t), \varphi(t-\Delta))]\, y(t) + c_0(\varphi(t), \varphi(t-\Delta))$$

имеет функцию Грина $G_0(\tau, \varphi)$ *задачи об инвариантных торах, удовлетворяющую для всех* $\tau \in (-\infty, \infty)$ *неравенству*

$$|G_0(\tau, \varphi)\, c_0(\varphi_\tau(\varphi), \psi_\tau(\varphi))|_r \leqslant Ke^{-\gamma|\tau|}|c_0(\varphi, \psi)|_r, \qquad (1.44)$$

где K и γ — некоторые положительные постоянные. Тогда можно указать такое $0 < \mu^0 \leqslant \mu_0$, что для всех $\mu \in [0, \mu^0]$ система уравнений (1.42) будет иметь инвариантный тор $\mathfrak{T}(\mu): y = u(\varphi, \mu)$, $u(\varphi, \mu) \in C^{r-1}(\mathfrak{T}_m)$, для которого

$$\lim_{\mu \to 0} | u(\varphi, \mu)|_{r-1} = 0. \tag{1.45}$$

§ 2. СУЩЕСТВОВАНИЕ ЛИПШИЦЕВЫХ ТОРОВ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy(t)}{dt} = -b(\varphi(t),\ \varphi(t-\Delta),\ y(t),\ y(t-\Delta))\, y(t) - b_1(\varphi(t),\ \varphi(t-\Delta),$$

$$y(t),\ y(t-\Delta))\, y(t-\Delta) + c(\varphi(t),\ \varphi(t-\Delta)); \tag{2.1}$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = a(\varphi(t),\ y(t)),$$

где $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, a, b, b_1, c — периодические по φ, $\psi = \varphi(t-\Delta)$ с периодом 2π функции, определенные в области

$$(\varphi, \psi, y, z) \in (\mathfrak{T}_m \times \mathfrak{T}_m \times d \times d). \tag{2.2}$$

Предположим, что правая часть системы (2.1) в области (2.2) удовлетворяет условиям:

1) $a(\varphi, y)$, $b(\varphi, \psi, y, z)$, $b_1(\varphi, \psi, y, z)$, $c(\varphi, \psi) \in C^1(\mathfrak{M})$;

2) производные от вектор-функций $a(\varphi, y)$, $c(\varphi, \psi)$ и матриц $b(\varphi, \psi, y, z)$, $b_1(\varphi, \psi, y, z)$ удовлетворяют условиям Липшица

$$\left\| \frac{\partial a(\varphi', y')}{\partial \varphi} - \frac{\partial a(\varphi'', y'')}{\partial \varphi} \right\| \leqslant K_1 \| \varphi' - \varphi'' \| + K_2 \| y' - y'' \|;$$

$$\left\| \frac{\partial a(\varphi', y')}{\partial y} - \frac{\partial a(\varphi'', y'')}{\partial y} \right\| \leqslant K_3 \| \varphi' - \varphi'' \| + K_4 \| y' - y'' \|;$$

$$\left\| \frac{\partial b(\varphi', \psi', y', z')}{\partial \varphi_r} - \frac{\partial b(\varphi'', \psi'', y'', z'')}{\partial \varphi_r} \right\| \leqslant K_{5r} \| \varphi' - \varphi'' \| +$$

$$+ K_{5r}^{\Delta} \| \psi' - \psi'' \| + K_{6r} \| y' - y'' \| + K_{6r}^{\Delta} \| z' - z'' \|;$$

$$\left\| \frac{\partial b(\varphi', \psi', y', z')}{\partial \psi_r} - \frac{\partial b(\varphi'', \psi'', y'', z'')}{\partial \psi_r} \right\| \leqslant L_{7r} \| \varphi' - \varphi'' \| +$$

$$+ L_{7r}^{\Delta} \| \psi' - \psi'' \| + L_{8r} \| y' - y'' \| + L_{8}^{\Delta} \| z' - z'' \|;$$

$$\left\| \frac{\partial b(\varphi', \psi', y', z)}{\partial y_k} - \frac{\partial b(\varphi'', \psi'', y'', z'')}{\partial y_k} \right\| \leqslant K_{9k} \| \varphi' - \varphi'' \| +$$

$$+ K_{9k}^{\Delta} \| \psi' - \psi'' \| + K_{10k} \| y' - y'' \| + K_{10k}^{\Delta} \| z' - z'' \|;$$

$$\left\| \frac{\partial b(\varphi', \psi', y', z')}{\partial z_k} - \frac{\partial b(\varphi'', \psi'', y'', z'')}{\partial z_k} \right\| \leqslant K_{11k} \| \varphi' - \varphi'' \| +$$

$$+K^{\Delta}_{11k}\|\psi'-\psi''\|+K_{12k}\|y'-y''\|+K^{\Delta}_{12k}\|z'-z''\|;$$

$$\left\|\frac{\partial b(\varphi',\psi',y',z')}{\partial\varphi_r}-\frac{\partial b_1(\varphi'',\psi'',y'',z'')}{\partial\varphi_r}\right\|\leqslant K_{13r}\|\varphi'-\varphi''\|+$$

$$+K^{\Delta}_{13r}\|\psi'-\psi''\|+K_{14r}\|y'-y''\|+K^{\Delta}_{14r}\|z'-z''\|;$$

$$\left\|\frac{\partial b_1(\varphi',\psi',y',z')}{\partial\psi_r}-\frac{\partial b_1(\varphi'',\psi'',y'',z'')}{\partial\psi_r}\right\|\leqslant K_{15r}\|\varphi'-\varphi''\|+$$

$$+K^{\Delta}_{15r}\|\psi'-\psi''\|+K_{16r}\|y'-y''\|+K^{\Delta}_{16r}\|z'-z''\|;$$

$$\left\|\frac{\partial b_1(\varphi',\psi',y',z')}{\partial y_k}-\frac{\partial b_1(\varphi'',\psi'',y'',z'')}{\partial y_k}\right\|\leqslant K_{17k}\|\varphi'-\varphi''\|+$$

$$+K^{\Delta}_{17k}\|\psi'-\psi''\|+K_{18k}\|y'-y''\|+K^{\Delta}_{18k}\|z'-z''\|;$$

$$\left\|\frac{\partial b_1(\varphi',\psi',y',z')}{\partial z_k}-\frac{\partial b_1(\varphi'',\psi'',y'',z'')}{\partial z_k}\right\|\leqslant K_{19k}\|\varphi'-\varphi''\|+$$

$$+K^{\Delta}_{19k}\|\psi'-\psi''\|+K_{20k}\|y'-y''\|+K^{\Delta}_{20k}\|z'-z''\|;$$

$$\left\|\frac{\partial c(\varphi',\psi')}{\partial\varphi_r}-\frac{\partial c(\varphi'',\psi'')}{\partial\varphi_r}\right\|\leqslant K_{21}\|\varphi'-\varphi''\|+K^{\Delta}_{21}\|\psi'-\psi''\|;$$

$$\left\|\frac{\partial c(\varphi',\psi')}{\partial\psi_r}-\frac{\partial c(\varphi'',\psi'')}{\partial\psi_r}\right\|\leqslant K_{22}\|\varphi'-\varphi''\|+K^{\Delta}_{22}\|\psi'-\psi''\|;$$

$$r=1,2,\ldots,m;\qquad k=1,2,\ldots,n;$$

3) $$\min_{\|\eta\|=1}\langle b(\varphi,\psi,0,0)\eta,\eta\rangle\geqslant\beta,$$

$$\alpha>0,\quad \beta+2\alpha>0.$$

$$\min_{\|\eta\|=1}\left\langle\frac{\partial a(\varphi,0)}{\partial\varphi}\eta,\eta\right\rangle\geqslant\alpha,$$

При выполнении этих условий найдем условия существования инвариантного тороидального многообразия $\mathfrak{T}: y=u(\varphi)$ системы (2.1), производные которого удовлетворяют условиям Липшица. Для отыскания тора $\mathfrak{T}$ применим, как и раньше, итерационный процесс. При этом $\mathfrak{T}$ ищется как предел последовательности торов $\mathfrak{T}^0, \mathfrak{T}^1, \ldots, \mathfrak{T}^i, \ldots$, каждый из которых является инвариантным тором

$$\mathfrak{T}^{i+1}: y=u^{i+1}(\varphi),\quad u^0(\varphi)\equiv 0,\quad i=0,1,\ldots,\tag{2.3}$$

системы уравнений

$$\frac{dy}{dt}=-b(\varphi(t),\varphi(t-\Delta),u^i(\varphi(t)),u^i(\varphi(t-\Delta)))\,y(t)-$$
$$-b_1(\varphi(t),\varphi(t-\Delta),u^i(\varphi(t)),u^i(\varphi(t-\Delta)))\,u^i(\varphi(t-\Delta))+$$
$$+c(\varphi(t),\varphi(t-\Delta));\tag{2.4}$$
$$\frac{d\varphi}{dt}=a(\varphi(t),u^i(\varphi(t))).$$

Обозначим через $\varphi_t^i(\varphi)$ $(\varphi_0^i(\varphi = \varphi)$ решение второго уравнения (2.4), а через $y_t^i(\tau, \varphi, y_0)$ $(y_\tau^i(\tau, \varphi, y_0) = y_0)$ — решение уравнения

$$\frac{dy}{dt} = -b(\varphi_t^i(\varphi), \varphi_{t-}^i(\varphi), u^i(\varphi_t^i(\varphi)), u^i(\varphi_{t-\Delta}^i(\varphi)))\, y. \qquad (2.5)$$

В силу непрерывности матрицы $b(\varphi, \psi, y, z)$ для заданного $0<\varepsilon_1<\beta$ всегда найдется $0<d_1<d$ такое, что будет выполняться неравенство

$$\|b(\varphi_t^i(\varphi), \varphi_{t-\Delta}^i(\varphi), u^i(\varphi_t^i(\varphi), u^i(\varphi_{t-\Delta}^i(\varphi)) -$$
$$-b(\varphi_t^i(\varphi), \varphi_{t-\Delta}^i(\varphi), 0, 0)\| \leqslant \varepsilon_1, \qquad (2.6)$$

если только $\|u^i(\varphi)\| \leqslant d_1$. Из уравнения (2.5) с учетом условия 3, неравенства (2.6) и неравенства Коши получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}\langle y_t^i(\tau, \varphi, y_0), y_t^i(\tau, \varphi, y_0)\rangle = 2\langle\frac{dy_t^i(\tau, \varphi, y_0)}{dt}, y_t^i(\tau, \varphi, y_0)\rangle =$$
$$= -2\langle[b(\varphi_t^i(\varphi), \varphi_{t-\Delta}^i(\varphi), 0, 0) + b(\varphi_t^i(\varphi), \varphi_{t-\Delta}^i(\varphi), u^i(\varphi_t^i(\varphi)),$$
$$u^i(\varphi_{t-\Delta}^i(\varphi))) - b(\varphi_t^i(\varphi), \varphi_{t-\Delta}^i(\varphi), 0, 0)]\, y_t^i(\tau, \varphi, y_0),$$
$$y_t^i(\tau, \varphi, y_0)\rangle \leqslant -2(\beta-\varepsilon_1)\langle y_t^i(\tau, \varphi, y_0), y_t^i(\tau, \varphi, y_0)\rangle,$$

откуда находим оценку

$$\|y^i(\tau, \varphi, y_0)\| \leqslant e^{(\beta-\varepsilon_1)(\tau-t)}\|y_0\|, \quad t \geqslant \tau. \qquad (2.7)$$

При выполнении неравенства (2.7) существует функция Грина задачи об инвариантных торах системы (2.4), которая имеет вид [120]

$$G_0^i(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi, i), & \tau < 0, \\ 0, & \tau > 0, \end{cases} \qquad (2.8)$$

где $\Omega_\tau^t(\varphi, i)$ — фундаментальная матрица решений системы (2.5), $\Omega_\tau^\tau(\varphi, i) = E$, E — единичная матрица. Тогда инвариантное многообразие (2.3) системы уравнений (2.4) будет определяться соотношением

$$u^{i+1}(\varphi) = \int_{-\infty}^{0} \Omega_{t_1}^0(\varphi, i)\,[c(\varphi_{t_1}^i(\varphi), \varphi_{t_1-\Delta}^i(\varphi)) - b_1(\varphi_{t_1}^i(\varphi), \varphi_{t_1-\Delta}^i(\varphi),$$
$$u^i(\varphi_{t_1}^i(\varphi)), u^i(\varphi_{t_1-\Delta}^i(\varphi)))\, u^i(\varphi_{t_1-\Delta}^i(\varphi))]\, dt_1. \qquad (2.9)$$

Найдем условия, при выполнении которых в системе (2.4) существует инвариантный тор. Поскольку $\Omega_\tau^\tau(\varphi, i) = E$, то из оценки (2.7) следует, что для решений $y_t^i(\tau, \varphi)$, $y_\tau^i(\tau, \varphi) = l_s = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ выполняются неравенства

$$\|y_t^i(\tau, \varphi)\| \leqslant e^{(\beta-\varepsilon_1)(\tau-t)}, \quad t \geqslant \tau;$$
$$\|\Omega_\tau^t(\varphi, i)\| \leqslant n e^{(\beta-\varepsilon_1)(\tau-t)}, \quad t \geqslant \tau. \qquad (2.10)$$

Так как $u^0(\varphi)\equiv 0$, то из соотношения (2.9) при $i=0$ получаем оценку

$$\|u^1(\varphi)\| \leqslant \int_{-\infty}^{0} \|\Omega_{t_1}^0(\varphi, 0)\| \, \|c(\varphi, \psi)\|_0 \, dt_1 \leqslant \frac{n\,\|c(\varphi, \psi)\|_0}{\beta - \varepsilon_1}. \quad (2.11)$$

Предполагая $\|c(\varphi, \psi)\|_0$ настолько малым, что выполняется неравенство

$$\frac{n\,\|c(\varphi, \psi)\|_0}{\beta - \varepsilon_1} \leqslant d_1,$$

из (2.11) находим $\|u^1(\varphi)\| \leqslant d_1$. Положим в (2.9) $i=1$, тогда

$$\|u^2(\varphi)\| \leqslant \int_{-\infty}^{0} \|\Omega_{t_1}^0(\varphi, 1)\| \left(\|b_1(\varphi, \psi, y, z)\|_0 \frac{n\,\|c(\varphi, \psi)\|_0}{\beta - \varepsilon_1} + \right.$$

$$\left. + \|c(\varphi, \psi)\|_0\right) dt_1 \leqslant \frac{n\,\|c(\varphi, \psi)\|_0}{\beta - \varepsilon_1}(1+q),$$

где

$$q_1 = \frac{n\,\|b_1(\varphi, \psi, y, z)\|_0}{\beta - \varepsilon_1}.$$

Предполагая, что

$$q < 1, \quad \frac{n\,\|c(\varphi, \psi)\|_0}{\beta - \varepsilon_1}(1+q) \leqslant d, \quad (2.12)$$

убеждаемся, что $\|u^2(\varphi)\| \leqslant d_1$. Методом полной математической индукции находим, что для всех $i = 0, 1, \ldots$ выполняются оценки

$$\|u^{i+1}(\varphi)\| \leqslant \frac{n\,\|c(\varphi, \psi)\|_0}{\beta - \varepsilon_1} \sum_{s=0}^{i} q^s \leqslant \frac{n\,\|c(\varphi, \psi)\|_0}{(\beta - \varepsilon_1)(1-q)} \leqslant d_1. \quad (2.13)$$

Таким образом, при выполнении неравенств (2.12) функции $u^{i+1}(\varphi)$ существуют для всех i и удовлетворяют неравенству (2.13).

Выясним теперь условия существования производных $\frac{\partial u^{i+1}(\varphi)}{\partial \varphi_j}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ Дифференцируя (2.9), получаем

$$\frac{\partial u^{i+1}(\varphi)}{\partial \varphi_j} = \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial \Omega_{t_1}^0(\varphi, i)}{\partial \varphi_j} \{c(\varphi_{t_1}^i, \varphi_{t_1-\Delta}^i(\varphi)) - b_1[\varphi_{t_1}^i(\varphi), \varphi_{t_1-\Delta}^i(\varphi),$$

$$u^i(\varphi_{t_1}^i(\varphi), u^i(\varphi_{t_1-\Delta}^i(\varphi))]\, u^i(\varphi_{t_1-\Delta}^i(\varphi))\}\, dt_1 +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} \Omega_{t_1}^0(\varphi, i) \left\{ \sum_{r=1}^{m} \left[\frac{\partial b_1}{\partial \varphi_{t_1,r}^i} \frac{\partial \varphi_{t_1 r}^i(\varphi)}{\partial \varphi_j} + \frac{\partial b_1}{\partial \varphi_{t_1-\Delta,r}} \frac{\partial \varphi_{t_1-\Delta,r}^i(\varphi)}{\partial \varphi_j} + \right.\right.$$

$$\left.+ \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial b_1}{\partial y_k} \frac{\partial u_k^i(\varphi_{t_2}^i(\varphi))}{\partial \varphi_{t_1,r}^i} \frac{\partial \varphi_{t_1 r}^i(\varphi)}{\partial \varphi_j} + \frac{\partial b_1}{\partial y_{k\Delta}} \frac{\partial u_k^i(\varphi_{t_1-\Delta}^i(\varphi))}{\partial \varphi_{t_1-\Delta,r}^i} \frac{\partial \varphi_{t_1-\Delta,r}^i(\varphi)}{\partial \varphi_j} \right)\right] \times$$

$$\times u^i(\varphi^i_{t_1-\Delta}(\varphi)) - b_1 \frac{\partial u^i(\varphi^i_{t_1-\Delta}(\varphi))}{\partial \varphi^i_{t_1-\Delta}} \frac{\partial \varphi^i_{t_1-\Delta}}{\partial \varphi_j} + \frac{\partial c}{\partial \varphi^i_{t_1}} \frac{\partial \varphi^i_{t_1}(\varphi)}{\partial \varphi_j} +$$

$$+ \frac{\partial c}{\partial \varphi^i_{t_1-\Delta}} \frac{\partial \varphi^i_{t_1-\Delta}(\varphi)}{\partial \varphi_j}\Big\} dt_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Omega^0_{t_1}(\varphi, i)}{\partial \varphi_j} H^i_1(t_1, \varphi)\, dt_1 +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} \Omega^0_{t_1}(\varphi, i) H^i_2(t_1, \varphi)\, dt_1. \qquad (2.14)$$

Продифференцируем решение второго из уравнений (2.4):

$$\frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial \varphi^i_{t_1}(\varphi)}{\partial \varphi_j}\right) = \left(\frac{\partial a(\varphi^i_{t_1}(\varphi), u^i(\varphi^i_{t_1}(\varphi)))}{\partial \varphi^i} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial a(\varphi^i_{t_1}(\varphi), u^i(\varphi^i_{t_1}(\varphi)))}{\partial y} \frac{\partial u^i(\varphi^i_{t_1}(\varphi))}{\partial \varphi^i_{t_1}}\right) \frac{\partial \varphi^i_{t_1}(\varphi)}{\partial \varphi_j}. \qquad (2.15)$$

Предполагая, что выполняется неравенство

$$\left\| \frac{\partial u^i(\varphi)}{\partial \varphi_j} \right\| \leqslant R_i < \rho, \qquad (2.16)$$

(2.15) получаем

$$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{\partial \varphi^i_{t_1}(\varphi)}{\partial \varphi_j}, \frac{\partial \varphi^i_{t_1}(\varphi)}{\partial \varphi_j}\right\rangle \geqslant 2\gamma \left\langle \frac{\partial \varphi^i_{t_1}(\varphi)}{\partial \varphi_j}, \frac{\partial \varphi^i_{t_1}(\varphi)}{\partial \varphi_j}\right\rangle,$$

$$\gamma = \alpha - \varepsilon_1 - mA\rho,$$

где

$$A = \left\| \frac{\partial a(\varphi, y)}{\partial y} \right\|_0, \quad \left\| \frac{\partial a(\varphi^i_{t_1}(\varphi), u^i(\varphi^i_{t_1}(\varphi))}{\partial \varphi^i_{t_1}} - \frac{\partial a(\varphi^i_{t_1}(\varphi), 0)}{\partial \varphi^i_{t_1}} \right\| \leqslant \varepsilon_1$$

для всех $\| u^i(\varphi)\| \leqslant d_2$, $d_2 \leqslant d$, или

$$\ln \frac{1}{\left\langle \frac{\partial \varphi^i_{t_1}(\varphi)}{\partial \varphi_j} \frac{\partial \varphi^i_{t_1}(\varphi)}{\partial \varphi}\right\rangle} \geqslant 2 \int_{t_1}^{0} \gamma dt \quad \text{при } t_1 \leqslant 0,$$

$$\left\langle \frac{\partial \varphi^i_{t_1}(\varphi)}{\partial \varphi_j}, \frac{\partial \varphi^i_{t_1}(\varphi)}{\partial \varphi_j}\right\rangle \leqslant e^{2\gamma t_1} \quad \text{при } t_1 \leqslant 0,$$

откуда

$$\left\| \frac{\partial \varphi^i_{t_1}(\varphi)}{\partial \varphi_j} \right\| \leqslant e^{\gamma t_1} \quad \text{при } t_1 \leqslant 0. \qquad (2.17)$$

Продифференцируем решение $y_t^i(\tau, \varphi)$ $(y_\tau^i(\tau, \varphi) = e_s)$ уравнения (2.5):

$$\frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial y_{t_1}^i(\tau, \varphi)}{\partial \varphi_j}\right) = -b(\varphi_{t_1}^i(\varphi), \varphi_{t_1-\Delta}^i(\varphi), u^i(\varphi_{t_1}^i(\varphi)), u^i(\varphi_{t_1-\Delta}^i(\varphi)))\times$$

$$\times\frac{\partial y_{t_1}^i(\tau, \varphi)}{\partial \varphi_j} - \sum_{r=1}^{m}\left[\frac{\partial b}{\partial \varphi_{t_1,r}}\frac{\partial \varphi_{t_1 r}^i(\varphi)}{\partial \varphi_j} + \frac{\partial b}{\partial \varphi_{t_1-\Delta,r}^i}\frac{\partial \varphi_{t_1-\Delta,r}^i(\varphi)}{\partial \varphi_j} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial b}{\partial y_k}\frac{\partial u_k^i(\varphi_{t_1}^i(\varphi))}{\partial \varphi_{t_1,l}^i}\frac{\partial \varphi_{t_1,r}^i(\varphi)}{\partial \varphi_j} + \frac{\partial b}{\partial y_{\Delta k}}\frac{\partial u_k^i(\varphi_{t_1-\Delta}^i(\varphi))}{\partial \varphi_{t_1-\Delta,l}^i}\frac{\partial \varphi_{t_1-\Delta,k}^i(\varphi)}{\partial \varphi_j}\right)\right]\times$$

$$\times y_{t_1}^i(\tau, \varphi) \equiv b(\varphi_{t_1}^i(\varphi), \varphi_{t_1-\Delta}^i(\varphi), u^i(\varphi_{t_1}^i(\varphi)), u^i(\varphi_{t_1-\Delta}^i(\varphi)))\frac{\partial y_{t_1}^i(\tau, \varphi)}{\partial \varphi_j} -$$

$$- F^i(t_1, \tau, \varphi). \qquad (2.18)$$

Решение уравнения (2.18) можно записать в виде

$$\frac{\partial y_{t_1}^i(\tau, \varphi)}{\partial \varphi_j} = -\int_\tau^{t_1}\Omega_{t_2}^{t_1}(\varphi, i)F^i(t_2, \tau, \varphi)\,dt_2, \quad t_1 > \tau. \qquad (2.19)$$

Оценивая (2.19), с учетом (2.10), (2.11), (2.16), (2.17) для всех

$$\|u^i(\varphi)\| \leqslant d_0, \qquad d_0 = \min(d_1, d_2) \qquad (2.20)$$

получаем оценку

$$\left\|\frac{\partial y_{t_1}^i(\tau, \varphi)}{\partial \varphi_j}\right\| \leqslant \int_\tau^{t_1}\|\Omega_{t_2}^{t_1}(\varphi, i)\|\,\|F^i(t_2, \tau, \varphi)\|\,dt_2 \leqslant \frac{n}{\gamma}(L_2 + L_2^\Delta e^{-\gamma\Delta} +$$

$$+ (L_3 + L_3^\Delta e^{-\gamma\Delta})\rho)\,e^{(\beta-\varepsilon_1)(\tau-t_1)}(e^{\gamma t_1} - e^{(\gamma\tau)}), \qquad (2.21)$$

где

$$L_2 = \sum_{r=1}^{m}\left\|\frac{\partial b(\varphi, \psi, y, z)}{\partial \varphi_r}\right\|_0, \qquad L_2^\Delta = \sum_{r=1}^{m}\left\|\frac{\partial b(\varphi, \psi, y, z)}{\partial \varphi_{\Delta r}}\right\|_0;$$

$$L_3 = \sum_{k=1}^{n} m\left\|\frac{\partial b(\varphi, \psi, y, z)}{\partial y_k}\right\|_0, \qquad L_3^\Delta = \sum_{k=1}^{n} m\left\|\frac{\partial b(\varphi, \psi, y, z)}{\partial y_{\Delta k}}\right\|_0.$$

Учитывая (2.21), находим

$$\left\|\frac{d\Omega_t^0(\varphi, i)}{d\varphi_l}\right\| \leqslant \frac{n^2}{\gamma}[L_2 + L_2^\Delta e^{-\gamma\Delta} + (L_3 + L_3^\Delta e^{-\gamma\Delta})\rho]\,e^{(\beta-\varepsilon_1)\tau}(1 - e^{-\gamma\tau})$$

$$(2.22)$$

при $\tau_1 \leqslant 0$. Из соотношения (2.14) при $i = 0$ с помощью (2.10), (2.17), (2.22) имеем

$$\left\| \frac{\partial u^1(\varphi)}{\partial \varphi_j} \right\| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{0} \left\| \frac{\partial \Omega_{t_1}^0(\varphi, 0)}{\partial \varphi_j} \right\| \| c(\varphi, \psi) \|_0 dt_1 +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{0} \| \Omega_{t_1}^0(\varphi, 0) \| \left\| \left(\frac{\partial c}{\partial \varphi_{t_1}^i} \frac{\partial \varphi_{t_1}^i(\varphi)}{\partial \varphi_j} + \frac{\partial c}{\partial \varphi_{t_1-\Delta}^i} \frac{\partial \varphi_{t_1-\Delta}^i(\varphi)}{\partial \varphi_j} \right) dt_1 \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n^2}{\beta(\beta+\gamma)} (L_2 + L_2^\Delta e^{-\gamma\Delta}) \| c(\varphi, \psi) \|_0 + \frac{n}{\beta+\gamma} (L_4 + L_4^\Delta e^{-\gamma\Delta}) < R_1, \qquad (2.23)$$

где

$$R_1 = \frac{n^2}{(\beta - \varepsilon_1)(\beta + \gamma - \varepsilon_1)} (L_2 + L^\Delta e^{-\gamma\Delta}) (\| c(\varphi, \psi) \|_0 + \| b_1(\varphi, \psi, y, z) \|_0 d_0) +$$

$$+ \frac{n}{\beta + \gamma - \varepsilon_1} (L_4 + L_4^\Delta e^{-\gamma\Delta} + (L_5 + L_5^\Delta e^{-\gamma\Delta}) d_0);$$

$$L_4 = \left\| \frac{\partial c(\varphi, \psi)}{\partial \varphi} \right\|_0; \qquad L_4^\Delta = \left\| \frac{\partial c(\varphi, \psi)}{\partial \psi} \right\|_0;$$

$$L_5 = \sum_{r=1}^{m} \left\| \frac{\partial b_1(\varphi, \psi, y, z)}{\partial \varphi_r} \right\|_0; \qquad L_5^\Delta = \sum_{r=1}^{m} \left\| \frac{\partial b_1(\varphi, \psi, y, z)}{\partial \psi_r} \right\|_0,$$

причем ρ, ε_1 настолько малы, что выполняется неравенство

$$\beta + 2\gamma - \varepsilon_1 > 0. \qquad (2.24)$$

При достаточно малых $\| c \|_0$, $\| b_1 \|_0$, $\left\| \frac{\partial b_1}{\partial \varphi_r} \right\|_0$, $\left\| \frac{\partial b_1}{\partial \psi_r} \right\|_0$, $\left\| \frac{\partial c}{\partial \varphi} \right\|$, $\left\| \frac{\partial c}{\partial \psi} \right\|$ всегда можно добиться того, чтобы выполнялось неравенство $R_1 < \rho$ и, следовательно, неравенство

$$\left\| \frac{\partial u^1(\varphi)}{\partial \varphi_j} \right\| < \rho. \qquad (2.25)$$

Из соотношения (2.14) при $i = 1$ получаем оценку

$$\left\| \frac{\partial u^2(\varphi)}{\partial \varphi_j} \right\| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{0} \left\| \frac{\partial \Omega_{t_1}^0(\varphi, 1)}{\partial \varphi_j} \right\| \| H_1^1(t_1, \varphi) \| dt_1 +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{0} \| \Omega_{t_1}^0(\varphi, 1) \| \| H_2^1(t_1, \varphi) \| dt_1 \leqslant R_1(1 + q_1) = R_2,$$

где

$$q_1 = \frac{n^2}{(\beta-\varepsilon_1)(\beta+\gamma-\varepsilon_1)}(L_3 + L_3^\Delta e^{-\gamma\Delta})(\| c(\varphi,\psi)\|_0 + \| b(\varphi,\psi,y,z)\|_0 d_2) +$$

$$+ \frac{n}{\beta+\gamma-\varepsilon_i}(L_6 d_0 + (m\| b_1\|_0 + L_6^\Delta d_0)e^{-\gamma\Delta}),$$

$$L_6 = \sum_{k=1}^{n} m \left\| \frac{\partial b_1(\varphi,\psi,y,z)}{\partial y_k} \right\|_0, \qquad L_6^\Delta = \sum_{k=1}^{n} m \left\| \frac{\partial b_1(\varphi,\psi,y,z)}{\partial z_k} \right\|_0.$$

Предположив, что выполняются неравенства

$$q_1 < 1; \tag{2.26}$$

$$R_1 \leqslant \rho(1-q_1), \tag{2.27}$$

методом полной математической индукции легко доказать, что для всех $i=1, 2, \ldots$

$$\left\| \frac{\partial u^i(\varphi)}{\partial \varphi_j} \right\| \leqslant R_j = \frac{R_1}{1-q_1} \leqslant \rho. \tag{2.28}$$

Докажем теперь, что всегда существует общая постоянная Липшица для функций $\frac{\partial u^{i+1}(\varphi)}{\partial \varphi_j}$. Действительно, из соотношения (2.14) получаем неравенство

$$\left\| \frac{\partial u^{i+1}(\bar{\bar{\varphi}})}{\partial \varphi_j} - \frac{\partial u^{i+1}(\bar{\varphi})}{\partial \varphi_j} \right\| \leqslant \int_{-\infty}^{0} \left(\left\| \frac{\partial \Omega_{t_1}^0(\bar{\bar{\varphi}}, i)}{\partial \varphi_j} - \frac{\partial \Omega_{t_1}^0(\bar{\varphi}, i)}{\partial \varphi_j} \right\| \| H_1^i(t, \bar{\bar{\varphi}})\| + \right.$$

$$\left. + \left\| \frac{\partial \Omega_{t_1}^0(\bar{\varphi}, i)}{\partial \varphi_j} \right\| \| H_1^i(t, \bar{\bar{\varphi}}) - H_1^i(t, \bar{\varphi})\| \right) dt_1 +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} (\| \Omega_{t_1}^0(\bar{\bar{\varphi}}, i) - \Omega_{t_1}^0(\bar{\varphi}, i)\| \| H_2^i(t_1, \bar{\bar{\varphi}})\| + \| \Omega_{t_1}^0(\varphi, i)\| \| H_2^i(t_1, \bar{\bar{\varphi}}) -$$

$$- H_2^i(t_1, \bar{\varphi})\|) dt_1. \tag{2.29}$$

Для нахождения оценок правых частей неравенства (2.29) необходимо установить некоторые неравенства. Перепишем соотношение (2.15) в виде

$$\frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial \varphi_{t_1}^i(\bar{\bar{\varphi}})}{\partial \varphi_j} - \frac{\partial \varphi_{t_1}^i(\bar{\varphi})}{\partial \varphi_j} \right) = \left(\frac{\partial a(\varphi_{t_1}^i(\bar{\bar{\varphi}}), u^i(\varphi_{t_1}^i(\bar{\bar{\varphi}})))}{\partial \varphi_{t_1}^i} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial a(\varphi_{t_1}^i(\bar{\bar{\varphi}}), u^i(\varphi_{t_1}^i(\bar{\bar{\varphi}})))}{\partial y} \frac{\partial u^i(\varphi_{t_1}^i(\bar{\bar{\varphi}}))}{\partial \varphi_{t_1}^i} \right) \left(\frac{\partial \varphi_{t_1}^i(\bar{\bar{\varphi}})}{\partial \varphi_j} - \frac{\partial \varphi_{t_1}^i(\bar{\varphi})}{\partial \varphi_j} \right) +$$

$$+ \left[\frac{\partial a(\varphi_{t_1}^i(\bar{\bar{\varphi}}), u^i(\varphi_{t_1}^i(\bar{\bar{\varphi}})))}{\partial \varphi_{t_1}^i} - \frac{\partial a(\varphi_{t_1}^i(\bar{\varphi}), u^i(\varphi_{t_1}^i(\bar{\varphi})))}{\partial \varphi_{t_1}^i} + \right.$$

$$+\frac{\partial a(\varphi^i_{t_1}(\bar{\bar{\varphi}})\,u^i(\varphi^i_{t_1}(\bar{\bar{\varphi}})))}{\partial y}\left(\frac{\partial u^i(\varphi^i_{t_1}(\bar{\bar{\varphi}}))}{\partial\varphi^i_{t_1}}-\frac{\partial u^i(\varphi^i_{t_1}(\bar{\varphi}))}{\partial\varphi^i_{t_1}}\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial a(\varphi^i_{t_1}(\bar{\bar{\varphi}}),\,u^i(\varphi^i_{t_1}(\varphi)))}{\partial y}-\frac{\partial a(\varphi^i_{t_1}(\bar{\varphi}),\,u^i(\varphi^i_{t_1}(\bar{\varphi})))}{\partial y}\right)\times$$

$$\times\frac{\partial u^i(\varphi^i_{t_1}(\bar{\varphi}))}{\partial\varphi^i_{t_1}}\Bigg|\frac{\partial\varphi^i_{t_1}(\bar{\varphi})}{\partial\varphi_j}.$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial\varphi^i_{t_1}(\bar{\bar{\varphi}})}{\partial\varphi_j}-\frac{\partial\varphi^i_{t_1}(\bar{\varphi})}{\partial\varphi_j}=-\int_{t_1}^{0}\bar{\Omega}^{t_1}_{t_2}(\bar{\bar{\varphi}},i)\,F_1(\bar{\bar{\varphi}},\bar{\varphi},i)\,dt_2, \tag{2.30}$$

где $\bar{\Omega}^{t_1}_{t_2}(\bar{\bar{\varphi}},i)$ — фундаментальная матрица решений

$$W^{t_1}_{t_2}(\bar{\bar{\varphi}},i),\ W^{t_1}_{t_2}(\bar{\bar{\varphi}},i)=\bar{e}_p=(\underbrace{0,0,\ldots,1}_{p-1},\underbrace{0,\ldots,0}_{m-p})$$

системы

$$\frac{d}{dt_1}W^{t_1}_{t_2}(\bar{\bar{\varphi}},i)=\left(\frac{\partial a(\varphi^i_{t_2}(\bar{\bar{\varphi}}),\,u^i(\varphi^i_{t_2}(\bar{\bar{\varphi}})))}{\partial\varphi^i_{t_2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial a(\varphi^i_{t_2}(\bar{\bar{\varphi}}),\,u^i(\varphi^i_{t_2}(\bar{\bar{\varphi}})))}{\partial y}\,\frac{\partial u^i(\varphi^i_{t_2}(\bar{\bar{\varphi}}))}{\partial\varphi^i_t}\right)W^{t_1}_{t_2}(\bar{\bar{\varphi}},i); \tag{2.31}$$

$$\Omega^{t_2}_{t_2}(\bar{\bar{\varphi}},i)=E$$

Из уравнения (2.31) получаем оценки, аналогичные (2.17):

$$\|W^{t_1}_{t_2}(\bar{\bar{\varphi}},i)\|\leqslant e^{\gamma(t_1-t_2)}\ \text{при}\ t_1\leqslant t_2; \tag{2.32}$$

$$\|\bar{\Omega}^{t_1}_{t_2}(\bar{\bar{\varphi}},i)\|\leqslant me^{\gamma(t_1-t_2)}\ \text{при}\ t_1\leqslant t_2. \tag{2.33}$$

С учетом неравенств (2.17) и (2.28) легко получить неравенства

$$\|u^i(\varphi^i_{t_2}(\bar{\bar{\varphi}})-u^i(\varphi^i_{t_2}(\bar{\varphi})\|\leqslant m\rho\,\|\varphi^i_{t_2}(\bar{\bar{\varphi}})-\varphi^i_{t_2}(\bar{\varphi})\|;$$

$$\|\varphi^i_{t_2}(\bar{\bar{\varphi}})-\varphi^i_{t_2}(\bar{\varphi})\|\leqslant\left\|\int_0^1\frac{\partial\varphi^i_{t_2}(\bar{\varphi}+\theta(\bar{\varphi}-\bar{\bar{\varphi}}))}{\partial\varphi}(\bar{\bar{\varphi}}-\bar{\varphi})\,d\theta\right\|\leqslant \tag{2.34}$$

$$\leqslant\|\bar{\bar{\varphi}}-\bar{\varphi}\|\,m\int_0^1 e^{\gamma t_2}d\theta=\|\bar{\bar{\varphi}}-\bar{\varphi}\|\,me^{\gamma t_2}.$$

Используя оценки (2.17), (2.28), (2.32), (2.33), (2.34), из соотношения (2.30) находим

$$\left\|\frac{\partial\varphi^i_{t_1}(\bar{\bar{\varphi}})}{\partial\varphi_j}-\frac{\partial\varphi^i_{t_1}(\bar{\varphi})}{\partial\varphi_j}\right\|\leqslant\|\bar{\bar{\varphi}}-\bar{\varphi}\|\,\frac{m^2}{\gamma}e^{\gamma t_2}(1-e^{\gamma t_1})\cdot(K_1+mAK'+$$

$$+(K_2+K_3+m\rho K_4)\,m\rho), \tag{2.35}$$

если предположить, что

$$\left\| \frac{\partial u^i(\bar{\bar{\varphi}})}{\partial \varphi_j} - \frac{\partial u^i(\bar{\varphi})}{\partial \varphi_j} \right\| \leqslant K^i \|\bar{\bar{\varphi}} - \bar{\varphi}\|. \tag{2.36}$$

Из (2.18) получаем уравнение

$$\frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial y^i_{t_1}(\tau, \bar{\bar{\varphi}})}{\partial \varphi_j} - \frac{\partial y^i_{t_1}(\tau, \bar{\varphi})}{\partial \varphi_j} \right) = -b\,(\varphi^i_{t_1}(\bar{\bar{\varphi}}), \varphi^i_{t_1-\Delta}(\bar{\bar{\varphi}}),$$

$$u^i(\varphi^i_{t_1}(\bar{\bar{\varphi}})), u^i(\varphi^i_{t_1-\Delta}(\bar{\bar{\varphi}}))) \left(\frac{\partial y_{t_1}(\tau, \bar{\bar{\varphi}})}{\partial \varphi_j} - \frac{\partial y^i_{t_1}(\tau, \bar{\varphi})}{\partial \varphi_j} \right) +$$

$$+ \{b\,(\varphi^i_{t_1}(\bar{\varphi}), \varphi^i_{t_1-\Delta}(\bar{\varphi}), u^i(\varphi^i_{t_1}(\bar{\varphi})), u^i(\varphi^i_{t_1-\Delta}(\bar{\varphi}))) -$$

$$- b\,(\varphi^i_{t_1}(\bar{\bar{\varphi}}), \varphi^i_{t_1-\Delta}(\bar{\bar{\varphi}}), u^i(\varphi^i_{t_1}(\bar{\bar{\varphi}})), u^i(\varphi^i_{t_1-\Delta}(\bar{\bar{\varphi}})))\} \frac{\partial y^i_{t_1}(\tau, \bar{\varphi})}{\partial \varphi_j} +$$

$$+ F^i(t_1, \tau, \bar{\varphi}) - F^i(t_1, \tau, \bar{\bar{\varphi}}), \tag{2.37}$$

решение которого можно записать в виде

$$\frac{\partial y^i_0(\tau, \bar{\bar{\varphi}})}{\partial \varphi_j} - \frac{\partial y^i_0(\tau, \bar{\varphi})}{\partial \varphi_j} = \int_\tau^0 \Omega^0_{t_1}(\bar{\bar{\varphi}}, i) \Big\{ (b\,(\varphi^i_{t_1}(\bar{\varphi}), \varphi^i_{t_1-\Delta}(\bar{\varphi}),$$

$$u^i(\varphi^i_{t_1}(\bar{\varphi})), u^i(\varphi^i_{t_1-\Delta}(\bar{\varphi}))) - b\,(\varphi^i_{t_1}(\bar{\bar{\varphi}}), \varphi^i_{t_1-\Delta}(\bar{\bar{\varphi}}), u^i(\varphi^i_{t_1}(\bar{\bar{\varphi}})), u^i(\varphi^i_{t_1-\Delta}(\bar{\bar{\varphi}})))) \times$$

$$\times \frac{\partial y^i_{t_1}(\tau, \bar{\varphi})}{\partial \varphi_j} + F^i(t_1, \tau, \bar{\varphi}) - F^i(t_1, \tau, \bar{\bar{\varphi}}) \Big\} dt_1. \tag{2.38}$$

Из этого соотношения, аналогично предыдущему, легко установить оценку разности $\frac{\partial y^i_0(\tau, \bar{\bar{\varphi}})}{\partial \varphi_j} - \frac{\partial y^i_0(\tau, \bar{\varphi})}{\partial \varphi_j}$.

Принимая во внимание полученные выше оценки, из неравенства (2.29) методом полной математической индукции легко доказать для всех $i=0, 1, \ldots$ неравенство

$$\left\| \frac{\partial u^{i+1}(\bar{\bar{\varphi}})}{\partial \varphi_j} - \frac{\partial u^{i+1}(\bar{\varphi})}{\partial \varphi_j} \right\| \leqslant K \|\bar{\bar{\varphi}} - \bar{\varphi}\|, \tag{2.39}$$

$$K = \overline{K}/(1 - q_2), \tag{2.40}$$

где K, q_2 — вполне определенные постоянные, причем

$$q_2 < 1. \tag{2.41}$$

Таким образом, при выполнении условия (2.41) производные $\frac{\partial u^{i+1}(\varphi)}{\partial \varphi_j}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, будут удовлетворять условию Липшица с постоянной K.

Докажем теперь сходимость последовательности инвариантных торов (2.3) по норме

$$\| u(\varphi) \|_1 = \| u(\varphi) \|_0 + \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \left\| \frac{\partial u(\varphi)}{\partial \varphi_j} \right\|_0. \tag{2.42}$$

Из соотношения (2.9) получаем неравенство

$$\| u^{i+1}(\varphi) - u^i(\varphi) \|_1 = \| u^{i+1}(\varphi) - u^i(\varphi) \|_0 + \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \left\| \frac{\partial u^{i+1}(\varphi)}{\partial \varphi_j} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial u^i(\varphi)}{\partial \varphi_j} \right\|_0 \leqslant \int_0^\infty \{ \| \Omega^0_{t_1}(\varphi, i) - \Omega^0_{t_1}(\varphi, i-1) \| (\| b_1 \| d_2 + \| c \|) +$$

$$+ \| \Omega^0_{t_1}(\varphi, i-1) \| (\| b_1(\varphi^i_{t_1}(\varphi), \varphi^i_{t_1-\Delta}(\varphi), u^i(\varphi^i_{t_1}(\varphi)),$$

$$u^i(\varphi^i_{t_1-\Delta}(\varphi))) \, u^i(\varphi^i_{t_1-\Delta}(\varphi)) - b_1(\varphi^{i-1}_{t_1}(\varphi), \varphi^{i-1}_{t_1-\Delta}(\varphi),$$

$$u^{i-1}(\varphi^{i-1}_{t_1}(\varphi)), u^{i-1}(\varphi^{i-1}_{t_1-\Delta}(\varphi))) \, u^{i-1}(\varphi^{i-1}_{t_1-\Delta}(\varphi)) \| + \| c(\varphi^i_{t_1}(\varphi), \varphi^i_{t_1-\Delta}(\varphi)) -$$

$$- c(\varphi^{i-1}_{t_1}(\varphi), \varphi^{i-1}_{t_1-\Delta}(\varphi)) \|) + \left\| \frac{\partial \Omega^0_{t_1}(\varphi, i)}{\partial \varphi_j} - \frac{\partial \Omega^0_{t_1}(\varphi, i-1)}{\partial \varphi_j} \right\| \| H^i_1(t, \varphi) \| +$$

$$+ \left\| \frac{\partial \Omega^0_{t_1}(\varphi, i-1)}{\partial \varphi_j} \right\| \| H^i_1(t, \varphi) - H^{i-1}_1(t, \varphi) \| + \| \Omega^0_{t_1}(\varphi, i) -$$

$$- \Omega^0_{t_1}(\varphi, i-1) \| \| H^i_2(t_1, \varphi) \| + \| \Omega^0_{t_1}(\varphi, i-1) \| \| H^i_2(t_1, \varphi) -$$

$$- H^{i-1}_2(t_1, \varphi) \| \} \, dt_1. \tag{2.43}$$

Для оценки правой части этого неравенства необходимы некоторые соотношения. Для решений $\varphi^i_t(\varphi)$ первого уравнения системы (2.4) получаем выражение

$$\frac{d(\varphi^i_{t_1}(\varphi) - \varphi^{i-1}_{t_1}(\varphi))}{dt} = \left\{ \int_0^1 \frac{\partial a(\varphi^{i-1}_{t_1}(\varphi) + \theta(\varphi^i_{t_2}(\varphi) - \varphi^{i-1}_{t_1}(\varphi)), u^i(\varphi^i_t(\varphi)))}{\partial \varphi^i_{t_1}(\varphi)} \, d\theta + \right.$$

$$+ \int_0^1 \frac{\partial a(\varphi^i_{t_1}(\varphi), u^i(\varphi^{i-1}_{t_1}(\varphi)) + \theta(u^i(\varphi^i_{t_1}(\varphi)) - u^{i-1}(\varphi^{i-1}_{t_1}(\varphi)))}{\partial y} \, d\theta \times$$

$$\left. \times \int_0^1 \frac{\partial u^{i-1}(\varphi^{i-1}_{t_1}(\varphi) + \theta_1(\varphi^i_{t_1}(\varphi) - \varphi^{i-1}_{t_1}(\varphi)))}{\partial \varphi^i_t(\varphi)} \, d\theta_1 \right\} (\varphi^i_{t_1}(\varphi) - \varphi^{i-1}_{t}(\varphi)) +$$

$$+ \int_0^1 \frac{\partial a(\varphi^{i-1}_{t_1}(\varphi), u^{i-1}(\varphi^{i-1}_{t_1}(\varphi)) + \theta(u^i(\varphi^i_{t_1}(\varphi)) - u^{i-1}(\varphi^{i-1}_{t_1}(\varphi)))}{\partial y} \times$$

$$\times (u^i(\varphi^i_{t_1}(\varphi)) - u^{i-1}(\varphi^i_{t_1}(\varphi))) \, d\theta,$$

из которого следует

$$\varphi^i_{t_1}(\varphi)-\varphi^{i-1}_{t_1}(\varphi)=$$

$$=\int_{t_1}^{0}\bar{\Omega}^{t_1}_{t_2}\int_0^1\frac{\partial a\,(\varphi^{i-1}_{t_2}(\varphi),u^{i-1}(\varphi^{i-1}_{t_2}(\varphi))+\theta\,(u^i(\varphi^i_{t_2}(\varphi))-u^{i-1}(\varphi^{i-1}_{t_2}(\varphi)))}{\partial y}\times$$

$$\times(u^i(\varphi^i_{t_2}(\varphi))-u^{i-1}(\varphi^i_{t_2}(\varphi)))\,d\theta dt_2.$$

Отсюда в силу (2.33) находим

$$\|\varphi^i_{t_1}(\varphi)-\varphi^{i-1}_{t_1}(\varphi)\|\leqslant\|u^i(\varphi)-u^{i-1}(\varphi)\|_0A\frac{m}{\gamma}(1-e^{\gamma t_1}),\quad t_1\leqslant 0. \tag{2.44}$$

Из соотношения (2.15), аналогично тому, как была получена оценка (4.30), имеем

$$\left\|\frac{\partial\varphi^i_{t_1}(\varphi)}{\partial\varphi_j}-\frac{\partial\varphi^{i-1}_{t_1}(\varphi)}{\partial\varphi_j}\right\|\leqslant|t_1|e^{\gamma t_1}m\left\{\left[K_2+m\rho K_4+\frac{m}{\gamma}A(K_1+m\rho K_2+mAK+\right.\right.$$

$$\left.+m\rho K_3+m^2\rho^2K_4)\right]\|u^i(\varphi)-u^{i-1}(\varphi)\|_0+mA\left\|\frac{\partial u^i(\varphi)}{\partial\varphi_j}-\frac{\partial u^{i-1}(\varphi)}{\partial\varphi_j}\right\|_0\Bigg\}+$$

$$+(e^{2\gamma t_1}-e^{\gamma t_1})\frac{m}{\gamma^2}A\,[K_1+mAK+m\rho\,(K_2+K_3+m\rho\,(K_2+K_3+$$

$$+m\rho K_4)]\,\|u^i(\varphi)-u^{i-1}(\varphi)\|_0,\quad t_1\leqslant 0. \tag{2.45}$$

Из системы (2.5) следует

$$\frac{d}{dt}(y^i_{t_1}(\tau,\varphi)-y^{i-1}_{t_1}(\tau,\varphi))=-b\,(\varphi^i_{t_1}(\varphi),\varphi^i_{t_1-\Delta}(\varphi),u^i(\varphi^i_{t_1}(\varphi)),$$

$$u^i(\varphi^i_{t_1-\Delta}(\varphi)))\,(y^i_{t_1}(\tau,\varphi))-y^{i-1}_{t_1}(\tau,\varphi))+[b\,(\varphi^{i-1}(\varphi),\varphi^{i-1}_{t_1-\Delta}(\varphi),$$

$$u^{i-1}(\varphi^{i-1}_{t_1}(\varphi)),\ u^{i-1}(\varphi^{i-1}_{t_1-\Delta}(\varphi)))-b\,(\varphi^i_{t_1}(\varphi),\varphi^i_{t_1-\Delta}(\varphi),u^i(\varphi^i_{t_1}(\varphi)),$$

$$u^i(\varphi^i_{t_1-\Delta}(\varphi)))]\,y^{i-1}_{t_1}(\tau,\varphi),$$

откуда, аналогично оценке (2.19), получаем неравенство

$$\|y^i_{t_1}(\tau,\varphi)-y^{i-1}_{t_1}(\tau,\varphi)\|\leqslant n\,\|u^i(\varphi)-u^{i-1}(\varphi)\|_0\,e^{(\beta-\varepsilon_1)(\tau-t_1)}\times$$

$$\times\left\{(t_1-\tau)\left[\frac{m}{\gamma}A\left(\left\|\frac{\partial b}{\partial\varphi}\right\|_0+\left\|\frac{\partial b}{\partial\psi}\right\|_0\right)+\left(1+\frac{m^2\rho}{\gamma}A\right)\left(\left\|\frac{\partial b}{\partial y}\right\|_0+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left\|\frac{\partial b}{\partial z}\right\|_0\right)\right]+(e^{\gamma\tau}-e^{\gamma t_1})\frac{m}{\gamma^2}A\left[\left\|\frac{\partial b}{\partial\psi}\right\|_0+m\rho\left\|\frac{\partial b}{\partial y}\right\|_0+e^{-\lambda\Delta}\left(\left\|\frac{\partial b}{\partial\psi}\right\|_0+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+m\rho\left\|\frac{\partial b}{\partial z}\right\|_0\right)\right]\right\} \tag{2.46}$$

при всех $\tau \leqslant t_1 \leqslant 0$. Учитывая (2.28) и (2.44), находим

$$\| b_1(\varphi^i_t(\varphi), \varphi^i_{t_1-\Delta}(\varphi), u^i(\varphi^i_{t_1}(\varphi)), u^i(\varphi^i_{t_1-\Delta}(\varphi)))\, u^i(\varphi^i_{t_1-\Delta}(\varphi)) -$$
$$- b_1(\varphi^{i-1}_{t_1}(\varphi), \varphi^i_{t_1-\Delta}(\varphi), u^{i-1}(\varphi^{i-1}_{t_1}(\varphi)), u^{i-1}(\varphi^{i-1}_{t_1-\Delta}(\varphi)))\, u^{i-1}(\varphi^{i-1}_{t_1-\Delta}(\varphi)) \| +$$
$$+ \| c(\varphi^i_{t_1}(\varphi), \varphi^i_{t_1-\Delta}(\varphi)) - c(\varphi^{i-1}_{t_1}(\varphi), \varphi^{i-1}_{t_1-\Delta}(\varphi)) \| \leqslant \| u^i(\varphi) - u^{i-1}(\varphi) \|_0 \times$$
$$\times \left\{ \| b_1 \|_0 + \left(\left\| \frac{\partial b_1}{\partial y} \right\|_0 + \left\| \frac{\partial b_1}{\partial z} \right\|_0 \right) d_0 + \frac{m}{\gamma} A \left[L_4 + \left(\left\| \frac{\partial b_1}{\partial \varphi} \right\|_0 + \right.\right.\right.$$
$$\left. + m\rho \left\| \frac{\partial b_1}{\partial y} \right\|_0 \right) d_2 \Big] (1 - e^{\gamma t_1}) + \frac{m}{\gamma} A \left[L_4^\Delta + m\rho \| b_1 \|_0 + \left(\left\| \frac{\partial b_1}{\partial \psi} \right\|_0 + \right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + m\rho \left\| \frac{\partial b_1}{\partial z} \right\|_0 \right) d_0 \right] (1 - e^{\gamma(t_1-\Delta)}) \right\}. \tag{2.47}$$

Оценим теперь правую часть неравенства (2.43):

$$\| u^{i+1}(\varphi) - u^i(\varphi) \|_1 \leqslant N_1 \| u^i(\varphi) - u^{i-1}(\varphi) \|_0 +$$
$$+ N_2 \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \left\| \frac{\partial u^i(\varphi)}{\partial \varphi_j} - \frac{\partial u^{i-1}(\varphi)}{\partial \varphi_j} \right\|_0, \tag{2.48}$$

где N_1, N_2 — вполне определенные величины. Неравенство (2.48) можно переписать в виде

$$\| u^{i+1}(\varphi) - u^i(\varphi) \|_1 \leqslant N \| u^i(\varphi) - u^{i-1}(\varphi) \|_1, \tag{2.49}$$

где $N = \max(N_1, N_2)$. Предположив, что

$$N < 1, \tag{2.50}$$

из (2.49) получаем сходимость по норме $|\cdot|_1$ последовательности торов (2.3). Очевидно, что если предположить, что функции $b_1(\varphi, \psi, y, z)$, $c(\varphi, \psi)$, их производиые первого порядка по всем своим аргументам и постоянные Липшица производных достаточно малы в области (2.2), то всегда можно удовлетворить неравенствам (2.12), (2.26), (2.27), (2.41), (2.50).

Теорема 4.3 [139]. *Пусть правая часть системы дифференциальных уравнений*

$$\frac{dy(t)}{dt} = -b(\varphi(t), \varphi(t-\Delta), y(t), y(t-\Delta))\, y(t) - b_1(\varphi(t), \varphi(t-\Delta),$$
$$y(t), y(t-\Delta))\, y(t-\Delta) + c(\varphi(t), \varphi(t-\Delta)); \tag{2.51}$$
$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = a(\varphi(t), y(t))$$

удовлетворяет следующим условиям:

1) $a(\varphi, y), c(\varphi, \psi), b(\varphi, \psi, y, z), b_1(\varphi, \psi, y, z) \in C^1(\mathfrak{M})$;

2) производные от вектор-функций $a(\varphi, y)$, $c(\varphi, \psi)$ *и матриц* $b(\varphi, \psi, y, z)$, $b_1(\varphi, \psi, y, z)$ *удовлетворяют условиям Липшица;*

3) $\min\limits_{\|\eta\|=1} \langle b(\varphi, \psi, 0, 0)\eta, \eta\rangle \geqslant \beta,$

$$\min_{\|\eta\|=1} \langle \frac{\partial a(\varphi, 0)}{\partial \varphi}\eta, \eta\rangle \geqslant \alpha,$$

$$\alpha > 0, \quad \beta + 2\alpha \geqslant 0.$$

Функции $b_1(\varphi, \psi, y, z)$, $c(\varphi, \psi)$, их производные первого порядка по всем аргументам и постоянные Липшица для этих производных достаточно малы в области

$$\varphi \in \mathfrak{T}_m, \quad \psi \in \mathfrak{T}_m, \quad \|y\| \leqslant d, \quad \|z\| \leqslant d, \tag{2.52}$$

т. е. таковы, что выполняются неравенства (2.12), (2.26), (2.27), (2.41), (2.50). Тогда система дифференциальных уравнений (2.51) имеет инвариантное тороидальное многообразие $y = u(\varphi)$, удовлетворяющее условиям

$$\|u(\varphi)\| \leqslant d_0, \quad \left\| \frac{\partial u(\varphi)}{\partial \varphi_j} \right\| \leqslant \rho,$$

$$\left\| \frac{\partial u(\bar{\bar{\varphi}})}{\partial \varphi_j} - \frac{\partial u(\bar{\varphi})}{\partial \varphi_j} \right\| \leqslant K \|\bar{\bar{\varphi}} - \bar{\varphi}\| \quad (j = 1, \ldots, m).$$

§ 3. ИНВАРИАНТНЫЕ ТОРОИДАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, ПОДВЕРЖЕННЫХ ИМПУЛЬСНОМУ ВОЗДЕЙСТВИЮ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy(t)}{dt} = A(\varphi)y(t) + B(\varphi)y(t-\Delta) + c(\varphi(t), \varphi(t-\Delta), y(t), y(t-\Delta), \mu),$$
$$t \neq t_j;$$
$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = a(\varphi(t), y(t), \mu); \tag{3.1}$$
$$\Delta y|_{t=t_j} = H_j(\varphi(t_j), \varphi(t_j - \Delta), y(t_j), y(t_j - \Delta), \mu),$$

где $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$, $A(\varphi)$, $B(\varphi)$, $c(\varphi(t), \varphi(t-\Delta), y(t), y(t-\Delta, \mu)$, $a(\varphi(t), y(t), \mu)$, $H_j(\varphi(t), \varphi(t-\Delta), y(t), y(t-\Delta), \mu)$ — периодические по φ, $\psi = \varphi(t-\Delta)$ с периодом 2π функции, определенные для всех y, $z = y(t-\Delta)$, μ, принадлежащих области

$$\|y\| = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant d, \quad \|z\| \leqslant d, \quad \mu \in [0, \mu_0] \tag{3.2}$$

(μ — малый положительный параметр). В дальнейшем будем считать, что моменты времени t_j, функции H_j и запаздывание Δ удовлетворяют условиям

$$H_{j+p} = H_j, \quad t_{j+1} - t_j \geqslant h, \quad h > \Delta \geqslant 0.$$

Рассмотрим вопрос существования инвариантного тороидального множества системы (3.1) при $\mu=0$, предполагая, что при $\mu=0$ эта система имеет инвариантный тор $y\equiv 0$. При этом множество $\mathfrak{T}(\mu): y=u(\varphi, \mu)$ будем называть инвариантным, если $u(\varphi, \mu)$ — ограниченная непрерывная и периодическая по φ с периодом 2π функция. Эта функция будет определять инвариантное тороидальное множество $\mathfrak{T}(\mu)$ системы дифференциальных уравнений (3.1), если для всех $t\in(-\infty, \infty)$ выполняется тождество

$$\frac{du(\varphi_t(\tau,\varphi),\mu)}{dt}\equiv A(\varphi_t(\tau,\varphi))\,u(\varphi_t(\tau,\varphi),\mu)+B(\varphi_t(\tau,\varphi))\,u(\varphi_{t-\Delta}(\tau,\varphi),\mu)+$$

$$+c(\varphi_t(\tau,\varphi),\varphi_{t-\Delta}(\tau,\varphi),u(\varphi_t(\tau,\varphi),\mu),u(\varphi_{t-\Delta}(\tau,\varphi),\mu),\mu),\qquad t\neq t_j, \quad (3.3)$$

$$\Delta u(\varphi_t(\tau,\varphi),\mu)|_{t=t_j}=H_j(\varphi_{t_j}(\tau,\varphi),\varphi_{t_j-\Delta}(\tau,\varphi),u(\varphi_{t_j}(\tau,\varphi),\mu),$$

$$u(\varphi_{t_j-\Delta}(\tau,\varphi),\mu),\mu),$$

где $\varphi_t(\tau, \varphi)$, $\varphi_\tau(\tau, \varphi)=\varphi$ — решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=a(\varphi,\ u(\varphi,\mu),\mu),$$

в которой τ, φ — произвольные постоянные.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy(t)}{dt}=A(\varphi)\,y(t)+B(\varphi)\,y(t-\Delta)+c_1(\varphi);$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=a_1(\varphi),\qquad t\neq t_j;\qquad \Delta y|_{t=t_j}=H_j(\varphi). \quad (3.4)$$

Обозначим через $G_t(\tau, \varphi)$ непрерывную по $t\neq\tau$ и φ вещественную матричную функцию, периодическую по φ с периодом 2π, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $G(\tau, \varphi)$ при $t\neq\tau$ является решением уравнения

$$\frac{dy(t)}{dt}=A(\varphi_t(\tau,\varphi))\,y(t)+F(\varphi_t(\tau,\varphi))\,y(t-\Delta);$$

2) $$G(\tau,\varphi)|_{t=\tau+0}-G_t(\tau,\varphi)|_{t=\tau-0}=E, \quad (3.5)$$

где E — единичная матрица;

3) $$\|G_t(\tau,\varphi)\|\leqslant Ke^{-\gamma|t-\tau|} \quad (3.6)$$

для положительных $K>0$, $\gamma>0$, не зависящих от t, τ, φ и всех $(t,\tau)\subset(-\infty,\infty)$.

Функцию $G_0(\tau, \varphi)=G_t(\tau, \varphi)|_{t=0}$ будем называть функцией Грина задачи об инвариантных тороидальных множествах системы (3.4), а инвариантное тороидальное множество $y=u(\varphi, \mu)$ системы (3.4) определим формулой

$$u(\varphi,\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}G_0(s,\varphi)\,c_1(\varphi_s(\varphi))\,ds+\sum_{-\infty<j<\infty}G_0(t_j,\varphi)\,H_j(\varphi_{t_j}(\varphi)). \quad (3.7)$$

Как и раньше, используя функцию Грина задачи об инвариантных тороидальных множествах линейной системы (3.4), для отыскания инвариантного тороидального множества системы (3.1) будем применять итерационный процесс, позволяющий находить $\mathfrak{T}(\mu)$ как предел последовательности инвариантных тороидальных множеств $\mathfrak{T}^0(\mu)\equiv 0$, $\mathfrak{T}^1(\mu)\ldots,\mathfrak{T}^i(\mu),\ldots$, каждое из которых является инвариантным тороидальным множеством

$$\mathfrak{T}^{i+1}(\mu): y = u^{i+1}(\varphi, \mu), \quad i = 0, 1, \ldots \tag{3.8}$$

линейной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy(t)}{dt} = A(\varphi(t))\,y(t) + B(\varphi(t)\,y(t-\Delta) + c(\varphi(t), \varphi(t-\Delta),$$

$$u^i(\varphi(t), \mu), u^i(\varphi(t-\Delta), \mu), \mu), \quad t \neq t_j; \qquad \Delta y|_{t=t_j} = H_j(\varphi(t_j), \varphi(t_j-\Delta),$$

$$u^i(\varphi(t_j), \mu), u^i(\varphi_{t_j-\Delta}, \mu), \mu); \qquad \frac{d\varphi(t)}{dt} = a(\varphi(t), u^i(\varphi(t), \mu), \mu). \tag{3.9}$$

Пусть $\varphi_t^i(\varphi)$, $\varphi_\tau^i(\varphi) = \varphi$ — решение второго уравнения (3.9). Тогда, учитывая (3.7), инвариантное тороидальное множество системы (3.9) можно записать в виде

$$y = u^{i+1}(\varphi, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0^i(s, \varphi)\, c(\varphi_s^i(\varphi), \varphi_{s-\Delta}^i(\varphi), u^i(\varphi_s^i(\varphi), \mu), u^i(\varphi_{s-\Delta}^i(\varphi), \mu), \mu) \times$$

$$\times\, ds + \sum_{-\infty<j<\infty} G_0^i(t_j, \varphi)\, H_j(\varphi_{t_j}^i(\varphi), \varphi_{t_j-\Delta}^i(\varphi), u^i(\varphi_{t_j}^i(\varphi), \mu), u^i(\varphi_{t_j-\Delta}^i(\varphi), \mu), \mu). \tag{3.10}$$

В дальнейшем будем предполагать, что система (3.1) удовлетворяет следующим условиям:

$$\|a(\varphi, y, \mu)\| + \|c(\varphi, \psi, y, z, \mu)\| + \|H_j(\varphi, \psi, y, z, \mu)\| \leqslant M(d, \mu);$$

$$\|c(\varphi', \psi', y', z', \mu) - c(\varphi'', \psi'', y'', z'', \mu)\| + \|H_j(\varphi', \psi', y', z', \mu) -$$

$$- H_j(\varphi'', \psi'', y'', z'', \mu)\| \leqslant L(d, \mu)\,[\,\|\varphi' - \varphi''\| + \|\psi' - \psi''\| +$$

$$+ \|y' - y''\| + \|z' - z''\|]; \tag{3.11}$$

$$\|a(\varphi', y', \mu) - a(\varphi'', y'', \mu)\| \leqslant L(d, \mu)\,[\,\|\varphi' - \varphi''\| + \|y' - y''\|];$$

$$\|A(\varphi') - A(\varphi'')\| \leqslant A_1\|\varphi' - \varphi''\|, \quad A_1 > 0;$$

$$\|B(\varphi') - B(\varphi'')\| \leqslant B_1\|\varphi' - \varphi''\|, \quad B_1 > 0,$$

где $M(d, \mu)$, $L(d, \mu)$ — положительные монотонно убывающие функции, обладающие свойствами: $L(d, \mu)\to 0$, $M(d, \mu)\to 0$ при $d\to 0$, $\mu\to 0$.

При выполнении условий (3.11) возможность нахождения $\mathfrak{T}(\mu)$ в виде последовательности (3.8) обосновывает лемма 4.1, согласно которой предельная функция $u = \lim\limits_{i\to\infty} u^i(\varphi, \mu)$ будет определять инвариантное множество $\mathfrak{T}(\mu)$ при условии равномерной сходимости последовательности инвариантных множеств (3.8).

Существование последовательности тороидальных множеств (3.8) устанавливает

Лемма 4.3 [71]. *Если выполнены приведенные выше условия относительно правой части системы (3.1), то всегда можно указать такое положительное* μ_1, $0 \leqslant \mu_1 \leqslant \mu_0$, *чтобы при* $\mu \leqslant \mu_1$ *последовательность (3.10) определяла последовательность инвариантных множеств (3.8), каждое из которых удовлетворяет неравенству*

$$\| u^{i+1}(\varphi, \mu) \| \leqslant \frac{\alpha M(d, \mu)}{1 - 2\alpha L(d, \mu)}, \tag{3.12}$$

где

$$\alpha = \frac{2K}{\gamma}\left[1 + \frac{\gamma}{1 - e^{-\gamma h}}\right], \qquad 2\alpha L(d, \mu) < 1.$$

Доказательство. Поскольку $u^0(\varphi, \mu) \equiv 0$, то для $i = 0$ получаем оценку

$$\| u^1(\varphi, \mu) \| \leqslant K \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|s|} \| c(\varphi_s^0(\varphi), \varphi_{s-\Delta}^0(\varphi), 0, 0, \mu) \| ds +$$

$$+ K \sum_{-\infty < j < \infty} e^{-\gamma|t_j|} \| H_j(\varphi_{t_j}^0(\varphi), \varphi_{t_j-\Delta}^0(\varphi), 0, 0, \mu) \| \leqslant$$

$$\leqslant KM(d, \mu) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|s|} ds + KM(d, \mu) \sum_{-\infty < j < \infty} e^{-\gamma|t_j|} \leqslant$$

$$\leqslant KM(d, \mu)\left[\frac{2}{\gamma} + \frac{2}{1 - e^{-\gamma h}}\right] \leqslant \alpha M(d, \mu) \leqslant \frac{\alpha M(d, \mu)}{1 - 2\alpha L(d, \mu)}, \tag{3.13}$$

если только $2\alpha L(d, \mu) < 1$. Предположим, что оценка (3.13) выполняется для $i = k$, и покажем, что инвариантное множество $\mathfrak{T}^{k+1}(\mu)$: $: y = u^{k+1}(\varphi, \mu)$ существует и удовлетворяет неравенству (3.13). Действительно, с учетом условий (3.11), $t_{j+1} - t_j \geqslant h$ и неравенства (3.13) из соотношения (3.10) получаем оценку

$$\| u^{i+1}(\varphi, \mu) \| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \| G_0^i(s, \varphi) \| \, \| c(\varphi_s^i(\varphi), \varphi_{s-\Delta}^i(\varphi), u^i(\varphi_s^i(\varphi), \mu),$$

$$u^i(\varphi_s^i(\varphi), \mu), u^i(\varphi_{s-\Delta}^i(\varphi), \mu), \mu) - c(\varphi_s^i(\varphi), \varphi_{s-\Delta}^i(\varphi), 0, 0, \mu) \| ds +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \| G_0^i(s, \varphi) \| \, \| c(\varphi_s^i(\varphi), \varphi_{s-\Delta}^i(\varphi), 0, 0, \mu) \| ds +$$

$$+ \sum_{-\infty < j < \infty} \| G_0^i(t_j, \varphi) \| \, \| H_j(\varphi_{t_j}^i(\varphi), \varphi_{t_j-\Delta}^i(\varphi),$$

$$u^i(\varphi_{t_j}^i(\varphi), \mu), u^i(\varphi_{t_j-\Delta}^i(\varphi), \mu), \mu) - H_j(\varphi_{t_j}^i(\varphi), \varphi_{t_j-\Delta}^i(\varphi), 0, 0, \mu) \| +$$

$$+ \sum_{-\infty < j < \infty} \| G_0^i(t_j, \varphi) \| \, \| H_j(\varphi_{t_j}^i(\varphi), \varphi_{t_j-\Delta}^i(\varphi), 0, 0, \mu) \| \leqslant$$

$$\leqslant KL(d,\mu)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|s|}\,[\,\|u^i(\varphi_s^i(\varphi),\mu)\| + \|u^i(\varphi_{s-\Delta}^i(\varphi),\mu\|\|\,ds +$$

$$+ KL(d,\mu)\sum_{-\infty<j<\infty} e^{-\gamma|t_j|}\,[\,\|u^i(\varphi_{t_j}^i(\varphi),\mu)\| + \|u^i(\varphi_{t_j-\Delta}^i(\varphi),\mu)\|\,] +$$

$$+ KM(d,\mu)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|s|}ds + KM(d,\mu)\sum_{-\infty<j<\infty} e^{-\gamma|t_j|} \leqslant$$

$$\leqslant 2KL(d,\mu)\frac{\alpha M(d,\mu)}{1-2\alpha L(d,\mu)}\left[\frac{2}{\gamma} + \frac{2}{1-e^{-\gamma h}}\right] + \alpha M(d,\mu) =$$

$$= \frac{2\alpha^2 L(d,\mu)M(d,\mu)}{1-2\alpha L(d,\mu)} + \alpha M(d,\mu) = \frac{\alpha M(d,\mu)}{1-2\alpha L(d,\mu)}.$$

По методу полной математической индукции заключаем, что оценка (3.13) верна для всех $i=0, 1, 2, \ldots$, если $2\alpha L(d, \mu)<1$.

Поскольку $M(d, \mu)\to 0$ и $N(d, \mu)\to 0$ при $\mu\to 0$, то всегда можно выбрать μ_1 так, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{\alpha M(d,\mu)}{1-2\alpha L(d,\mu)} \leqslant d, \quad 2\alpha L(d,\mu) < 1. \tag{3.14}$$

При таком выборе μ_1 для всех $\mu\in[0, \mu_1]$ и $i=0, 1, 2, \ldots$ система (3.9) будет иметь инвариантное тороидальное множество $\mathfrak{T}^{i+1}(\mu): y = u^{i+1}(\varphi, \mu)$, для которого верна оценка (3.13). Кроме того, из неравенства (3.13) следует равностепенная ограниченность последовательности инвариантных тороидальных множеств (3.8).

Для доказательства сходимости последовательности инвариантных тороидальных множеств (3.8) понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 4.4 [71]. *Существуют положительные числа* $0\leqslant\mu_2\leqslant\mu_1$ *и* $N(\mu)$, $N(\mu)\to 0$ *при* $\mu\to 0$, *такие, что для всех* $0\leqslant\mu\leqslant\mu_2$, $-\infty<t<\infty$, $-\infty<\tau<\infty$, φ', φ'', $i=0, 1, \ldots$ *выполняются неравенства*

$$\|u^{i+1}(\varphi',\mu) - u^{i+1}(\varphi'',\mu)\| \leqslant N(\mu)\|\varphi' - \varphi''\|; \tag{3.15}$$

$$\|\varphi_t^i(\tau,\varphi') - \varphi_t^i(\tau,\varphi'')\| \leqslant \|\varphi' - \varphi''\|\,e^{L(d,\mu)(1+N(\mu))(t-\tau)}. \tag{3.16}$$

Доказательство. Из второго уравнения системы (3.9) при $i=0$ получаем неравенство

$$\|\varphi_t^0(\tau,\varphi') - \varphi_t^0(\tau,\varphi'')\| \leqslant \|\varphi' - \varphi''\| + L(d,\mu)\times$$

$$\times\left|\int_{\tau}^{t}\|\varphi_s^0(\tau,\varphi') - \varphi_s^0(\tau,\varphi'')\|\,ds\right|,$$

откуда следует оценка

$$\|\varphi_t^0(\tau,\varphi') - \varphi_t^0(t,\varphi'')\| \leqslant \|\varphi' - \varphi''\|\,e^{L(d,\mu)|t-\tau|}. \tag{3.17}$$

Поскольку $G_t(\tau, \varphi)$ — решение уравнения (3.5), то разность $G_t^0(\tau; \varphi') - G_t^0(\tau, \varphi'')$ будет решением уравнения

$$\frac{d}{dt}[G_t^0(\tau, \varphi') - G_t^0(\tau, \varphi'')] = A(\varphi_t^0(\tau, \varphi'))[G_t^0(\tau, \varphi') - G_t^0(\tau, \varphi'')] + B(\varphi_t^0(\tau, \varphi'))[G_{t-\Delta}^0(\tau, \varphi') - G_{t-\Delta}^0(\tau, \varphi'')] + [A(\varphi_t^0(\tau, \varphi') - A(\varphi_t^0(\tau, \varphi'')] G_t^0(\tau, \varphi'') + [B(\varphi_t^0(\tau, \varphi')) - B(\varphi_t^0(\tau, \varphi''))] G_{t-\Delta}^0(\tau, \varphi''), \tag{3.18}$$

и, следовательно, с учетом соотношений (3.6), (3.17) получаем оценку

$$\|G_t^0(\tau, \varphi') - G_t^0(\tau, \varphi'')\| \leqslant \|\varphi' - \varphi''\| \times \left\{K^2 A_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|t-s|} e^{-(\gamma - L(d,\mu))|s-\tau|} ds + K^2 B_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|t-s|} e^{-\gamma|s-\tau-\Delta|} e^{L(d,\mu)|s-\tau|} ds\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi' - \varphi''\| \left\{K^2 A_1 \left[\frac{2}{2\gamma - L(d,\mu)} + \frac{1 - e^{-L(d,\mu)|t-\tau|}}{L(d,\mu)}\right] e^{-(\gamma - L(d,\mu))|t-\tau|} + K^2 B_1 e^{L(d,\mu)\Delta} \left[\frac{1 + e^{L(d,\mu)\Delta}}{2\gamma - L(d,\mu)} + \frac{e^{(2\gamma + L(d,\mu))\Delta} - 1}{2\gamma + L(d,\mu)} + \frac{1 - e^{-L(d,\mu)\Delta}}{L(d,\mu)} + \frac{1 - e^{-L(d,\mu)|t-\tau-\Delta|}}{L(d,\mu)}\right] e^{-(\gamma - L(d,\mu))|t-\tau-\Delta|}\right\}. \tag{3.19}$$

Учитывая неравенства (3.17) и (3.19), из представления (3.10) при $i=0$ находим

$$\|u^1(\varphi', \mu) - u^1(\varphi'', \mu)\| \leqslant N_1(\mu)\|\varphi' - \varphi''\|, \tag{3.20}$$

где

$$N_1(\mu) = KL(d,\mu)\left\{\frac{2 + e^{L(d,\mu)\Delta} + e^{-\gamma\Delta}}{\gamma - L(d,\mu)} + \frac{2 + e^{L(d,\mu)\Delta} + e^{-\gamma\Delta}}{1 - e^{-(\gamma - L(d,\mu))h}} + \frac{e^{L(d,\mu)\Delta} - e^{-\gamma\Delta}}{\gamma + L(d,\mu)} + \frac{e^{L(d,\mu)\Delta} - e^{-\gamma\Delta}}{1 - e^{-(\gamma + L(d,\mu))h}}\right\} + K^2 M(d,\mu)\left[\frac{2A_1}{2\gamma - L(d,\mu)} + B_1 e^{L(d,\mu)\Delta}\left(\frac{1 + e^{L(d,\mu)\Delta}}{2\gamma - L(d,\mu)} + \frac{e^{(2\gamma + L(d,\mu))\Delta} - 1}{2\gamma + L(d,\mu)} + \frac{1 - e^{-L(d,\mu)\Delta}}{L(d,\mu)}\right)\right] \times$$

$$\times \left[\frac{2}{\gamma - L(d,\mu)} + \frac{2}{1 - e^{-(\gamma - L(d,\mu))h}}\right] + K^2 M(d,\mu)(A_1 + B_1 e^{L(d,\mu)\Delta}) \times \frac{1}{L(d,\mu)}\left[\frac{2}{\gamma - L(d,\mu)} + \frac{2}{\gamma} + \frac{2}{1 - e^{-(\gamma - L(d,\mu))h}} - \frac{2}{1 - e^{-\gamma h}}\right]. \tag{3.21}$$

При $i=1$ из второго уравнения системы (3.9) получаем с учетом (3.20) неравенство

$$\|\varphi_t^1(\tau,\varphi')-\varphi_t^1(\tau,\varphi'')\|\leqslant\|\varphi'-\varphi''\|+L(d,\mu)(1+N_1(\mu))\times$$
$$\times\left|\int_\tau^t\|\varphi_s^{\prime}(\tau,\varphi')-\varphi_s^{\prime}(\tau,\varphi'')\|\,ds\right|,$$

из которого следует оценка

$$\|\varphi_t^1(\tau,\varphi')-\varphi_t^1(\tau,\varphi'')\|\leqslant\|\varphi'-\varphi''\|\,e^{L(d,\mu)(1+N_1(\mu))|t-\tau|}. \tag{3.22}$$

Для разности $G_t^1(\tau,\varphi')-G_t^1(\tau,\varphi'')$ с учетом (3.22) получаем оценку

$$\|G_t^1(\tau,\varphi')-G_t^1(\tau,\varphi'')\|\leqslant\|\varphi'-\varphi''\|\times$$
$$\times\left\{K^2A_1\left[\frac{2}{2\gamma-L(d,\mu)(1+N_1(\mu))}+\frac{1-e^{-L(d,\mu)(1+N_1(\mu))|t-\tau|}}{L(d,\mu)(1+N_1(\mu))}\right]\times\right.$$
$$\times e^{-(\gamma-L(d,\mu)(1+N_i(\mu)))|t-\tau|}+K^2B_1e^{L(d,\mu)(1+N_i(\mu))\Delta}\times$$
$$\times\left[\frac{1+e^{L(d,\mu)(1+N_1(\mu))\Delta}}{2\gamma-L(d,\mu)(1+N_1(\mu))}+\frac{e^{(2\gamma+L(d,\mu)(1+N_1(\mu)))\Delta}-1}{2\gamma+L(d,\mu)(1+N_1(\mu))}+\right.$$
$$\left.+\frac{1-e^{-L(d,\mu)(1+N_1(\mu))\Delta}}{L(d,\mu)(1+N_1(\mu))}+\frac{1-e^{-L(d,\mu)(1+N_1(\mu))|t-\tau-\Delta|}}{L(d,\mu)(1+N_1(\mu))}\right]\times$$
$$\left.\times e^{-(\gamma-L(d,\mu)(1+N_1(\mu)))|t-\tau-\Delta|}\right\} \tag{3.23}$$

при $L(d,\mu)(1+N_i(\mu))<\gamma$. Из представления (3.10) и неравенств (3.22), (3.23) при $i=1$ находим

$$\|u^2(\varphi',\mu)-u^2(\varphi'',\mu)\|\leqslant\|\varphi'-\varphi''\|\,N_2(\mu), \tag{3.24}$$

где

$$N_2(\mu)=L(d,\mu)(1+N_1(\mu))K\left\{\frac{2+e^{L(d,\mu)(1+N_1(\mu))\Delta}+e^{-\gamma\Delta}}{\gamma-L(d,\mu)(1+N_1(\mu))}+\right.$$
$$+\frac{2+e^{L(d,\mu)(1+N_1(\mu))\Delta}+e^{-\gamma\Delta}}{1-e^{-(\gamma-L(d,\mu)(1+N_1(\mu)))h}}+\frac{e^{L(d,\mu)(1+N_1(\mu))\Delta}-e^{-\gamma\Delta}}{\gamma+L(d,\mu)(1+N_1(\mu))}+$$
$$\left.+\frac{e^{L(d,\mu)(1+N_1(\mu))\Delta}-e^{-\gamma\Delta}}{1-e^{-(\gamma+L(d,\mu)(1+N_1(\mu)))h}}\right\}+M(d,\mu)K^2\left\{\frac{2A_1}{2\gamma-L(d,\mu)(1+N_1(\mu))}+\right.$$
$$+B_1e^{L(d,\mu)(1+N_1(\mu))\Delta}\left[\frac{1+e^{L(d,\mu)(1+N_1(\mu))\Delta}}{2\gamma-L(d,\mu)(1+N_1(\mu))}+\frac{e^{(2\gamma+L(d,\mu)(1+N_1(\mu)))\Delta}-1}{2\gamma+L(d,\mu)(1+N_1(\mu))}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1-e^{-L(d,\mu)(1+N_1(\mu))\Delta}}{L(d,\mu)(1+N_1(\mu))}\right]\right\}\left[\frac{2}{\gamma-L(d,\mu)(1+N_1(\mu))}+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{1-e^{-(\gamma-L(d,\mu)(1+N_1(\mu)))h}}\right]+K^2\left(A_1+B_1e^{L(d,\mu)(1+N_1(\mu))\Delta}\right)\times$$
$$\times\frac{1}{L(d,\mu)(1+N_1(\mu))}\left[\frac{2}{\gamma-L(d,\mu)(1+N_1(\mu))}-\frac{2}{\gamma}+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{1-e^{-(\gamma-L(d,\mu)(1+N_1(\mu)))h}}-\frac{2}{1-e^{-\gamma h}}\right].$$

Методом полной математической индукции легко показать, что для всех $i=0, 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства

$$\| \varphi_i^i(\tau, \varphi') - \varphi_i^i(\tau, \varphi'') \| \leqslant \| \varphi' - \varphi'' \| e^{L(d,\mu)(1+N_i(\mu))|t-\tau|}; \tag{3.25}$$

$$\| G_i^i(\tau, \varphi') - G_i^i(\tau, \varphi'') \| \leqslant \| \varphi' - \varphi'' \| \Big\{ K^2 A_1 \Big[\frac{2}{2\gamma - L(d,\mu)(1+N_i(\mu))} + \frac{1 - e^{-L(d,\mu)(1+N_i(\mu))|t-\tau|}}{L(d,\mu)(1+N_i(\mu))} \Big] e^{-(\gamma - L(d,\mu)(1+N_i(\mu)))|t-\tau|} + K^2 B_1 e^{L(d,\mu)(1+N_i(\mu))\Delta} \times$$

$$\times \Big[\frac{1 + e^{L(d,\mu)(1+N_i(\mu))\Delta}}{2\gamma - L(d,\mu)(1+N_i(\mu))} + \frac{e^{2\gamma + L(d,\mu)(1+N_i(\mu)))\Delta} - 1}{2\gamma + L(d,\mu)(1+N_i(\mu))} + \frac{1 - e^{-L(d,\mu)(1+N_i(\mu))\Delta}}{L(d,\mu)(1+N_i(\mu))} + \frac{1 - e^{-L(d,\mu)(1+N_i(\mu))|t-\tau-\Delta|}}{L(d,\mu)(1+N_i(\mu))} \Big] \times$$

$$\times e^{-(\gamma - L(d,\mu)(1+N_i(\mu)))|t-\tau-\Delta|} \Big\}; \tag{3. 6}$$

$$\| u^{i+1}(\varphi', \mu) - u^{i+1}(\varphi'', \mu) \| \leqslant N_{i+1}(\mu) \| \varphi' - \varphi'' \| \tag{3.27}$$

при $L(d, \mu)(1 + N_i(\mu)) < \gamma$, где $N_{i+1}(\mu)$ находятся из рекуррентного соотношения

$$N_{i+1}(\mu) = L(d, \mu)(1 + N_i(\mu)) M_1(\mu, N_i(\mu)) + M(d, \mu) M_2(\mu, N_i(\mu)). \tag{3.28}$$

Здесь

$$M_1(\mu, N_i(\mu)) = K \Big\{ \frac{2 + e^{L(d,\mu)(1+N_i(\mu))\Delta} + e^{-\gamma\Delta}}{\gamma - L(d,\mu)(1+N_i(\mu))} + \frac{2 + e^{L(d,\mu)(1+N_i(\mu))\Delta} + e^{-\gamma\Delta}}{1 - e^{-(\gamma - L(d,\mu)(1+N_i(\mu)))h}} + \frac{e^{L(d,\mu)(1+N_i(\mu))\Delta} - e^{-\gamma\Delta}}{\gamma + L(d,\mu)(1+N_i(\mu))} + \frac{e^{L(d,\mu)(1+N_i(\mu))\Delta} - e^{-\gamma\Delta}}{1 - e^{-(\gamma + L(d,\mu)(1+N_i(\mu)))h}} \Big\}; \tag{3.29}$$

$$M_2(\mu, N_i(\mu)) = K^2 \Big\{ \frac{2A_1}{2\gamma - L(d,\mu)(1+N_i(\mu))} + B_1 e^{L(d,\mu)(1+N_i(\mu))\Delta} \Big[\frac{1 + e^{L(d,\mu)(1+N_i(\mu))\Delta}}{2\gamma - L(d,\mu)(1+N_i(\mu))} + \frac{e^{(2\gamma + L(d,\mu)(1+N_i(\mu)))\Delta} - 1}{2\gamma + L(d,\mu)(1+N_i(\mu))} +$$

$$+ \frac{1 - e^{-L(d,\mu)(1+N_i(\mu))\Delta}}{L(d,\mu)(1+N_i(\mu))} + \Big| \frac{2}{\gamma - L(d,\mu)(1+N_i(\mu))} + \frac{2}{1 - e^{-(\gamma - L(d,\mu)(1+N_i(\mu)))h}} \Big| + K^2 (A_1 + B_1 e^{L(d,\mu)(1+N_i(\mu))\Delta}) \times$$

$$\times \frac{1}{L(d,\mu)(1+N_i(\mu))} \Big[\frac{2}{\gamma - L(d,\mu)(1+N_i(\mu))} - \frac{2}{\gamma} + \frac{2}{1 - e^{-(\gamma - L(d,\mu)(1+N_i(\mu)))h}} - \frac{2}{1 - e^{-\gamma h}} \Big].$$

Выберем $\mu_2 \in [0, \mu_1]$ настолько малым, чтобы для всех $\mu \in [0, \mu_2]$ выполнялись неравенства

$$L(d, \mu) M_1(\mu, 1) < 1/3, \quad M(d, \mu) M_2(\mu, 1) < 1/3, \quad 2L(d, \mu) < \gamma. \tag{3.30}$$

Такой выбор возможен, поскольку из соотношений (3.30) следует, что

$$M_1(\mu, 1) \to K\left(\frac{4}{\gamma} + \frac{4}{1-e^{-\gamma h}}\right);$$

$$M_2(\mu, 1) \to K^2\left\{A_1\left[\frac{4}{\gamma^2} + \frac{2}{\gamma(1-e^{-\gamma h})} + \frac{2he^{-\gamma}}{(1-e^{-\gamma h})^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + B_1\left[\frac{3+e^{2\gamma\Delta}}{\gamma^2} + \frac{1+e^{2\gamma\Delta}}{\gamma(1-e^{-\gamma h})} + \frac{2he^{-\gamma h}}{(1-e^{-h\gamma})^2}\right]\right\}.$$

Тогда

$$N_{i+1}(\mu) \leqslant 2L(d, \mu) M_1(\mu, 1) + M(d, \mu) M_2(\mu, 1),$$

и, следовательно, для завершения доказательства леммы 4.4 положим

$$N(\mu) = 2L(d, \mu) M_1(\mu, 1) + M(d, \mu) M_2(\mu, 1). \tag{3.31}$$

Докажем теперь сходимость последовательности инвариантных тороидальных множеств (3.8). Для этого оценим разность $u^{i+1}(\varphi,\mu) - u^i(\varphi, \mu)$. Из представления (3.10) имеем

$$\|u^{i+1}(\varphi, \mu) - u^i(\varphi, \mu)\| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \{\|G_0^i(s, \varphi)\| \, \| c(\varphi_s^i(\varphi), \varphi_{s-\Delta}^i(\varphi),$$

$$u^i(\varphi_s^i(\varphi), \mu), u^i(\varphi_{s-\Delta}^i(\varphi), \mu), \mu) - c(\varphi_s^{i-1}(\varphi), \varphi_{s-\Delta}^{i-1}(\varphi), u^{i-1}(\varphi_s^{i-1}(\varphi),$$

$$u^{i-1}(\varphi_{s-\Delta}^{i-1}(\varphi), \mu), \mu)\| + \|G_0^i(s, \varphi) - G_0^{i-1}(s, \varphi)\| \, \| c(\varphi_s^{i-1}(\varphi), \varphi_{s-\Delta}^{i-1}(\varphi),$$

$$u^{i-1}(\varphi_s^{i-1}(\varphi), \mu), u^{i-1}(\varphi_{s-\Delta}^{i}(\varphi), \mu), \mu\|\} \, ds +$$

$$+ \sum_{-\infty<j<\infty} \{\|G_0^i(t_j, \varphi)\| \, \| H_j(\varphi_{t_j}^{i-1}(\varphi), \varphi_{t_j-\Delta}^i(\varphi), u^i(\varphi_{t_j}^i(\varphi), \mu),$$

$$u^i(\varphi_{t_j-\Delta}^i(\varphi), \mu, \mu) - H_j(\varphi_{t_j}^{i-1}(\varphi), \varphi_{t-\Delta}^{i-1}(\varphi), u^{i-1}(\varphi_{t_j}^{i-1}(\varphi), \mu),$$

$$u^{i-1}(\varphi_{t_j-\Delta}^{i-1}(\varphi), \mu), \mu)\| + \|G_0^i(t_j, \varphi) - G_0^{i-1}(t_j, \varphi)\| \, \| H_j(\varphi_{t_j}^{i-1}(\varphi), \varphi_{t_j-\Delta}^{i-1}(\varphi),$$

$$u^{i-1}(\varphi_{t_j}^{i-1}(\varphi), \mu), u^{i-1}(\varphi_j^{i-1}(\varphi), \mu), \mu\|\}. \tag{3.32}$$

Из неравенства (3.32) с учетом (3.6), (3.11) и (3.15) получаем оценку

$$\|u^{i+1}(\varphi, \mu) - u^i(\varphi, \mu)\| \leqslant KL(d, \mu) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|s|} \{(1 + N(\mu)) [\| \varphi_s^i(\varphi) -$$

$$- \varphi_s^{i-1}(\varphi)\| + \|\varphi_{s-\Delta}^i(\varphi) - \varphi_{s-\Delta}^{i-1}(\varphi)\|] + \|u^i(\varphi, \mu) - u^{i-1}(\varphi, \mu)\|_0 +$$

$$+ \|u^i(\varphi, \mu) - u^{i-1}(\varphi, \mu)\|_0\} ds + M(d, \mu) \int_{-\infty}^{\infty} \|G_0^i(s, \varphi) - G_0^{i-1}(s, \varphi)\| \, ds +$$

$$+ KL(d, \mu) \sum_{-\infty<j<\infty} e^{-\gamma|t_j|} \{(1 + N(\mu)) [\| \varphi_{t_j}^i(\varphi) - \varphi_{t_j}^{i-1}(\varphi)\| +$$

$$+\|\varphi^{i}_{t_j-\Delta}(\varphi)-\varphi^{i-1}_{t_j-\Delta}(\varphi)\|\| + \|u^{i}(\varphi,\mu)-u^{i-1}(\varphi,\mu)\|_0 +$$

$$+\|u^{i}(\varphi,\mu)-u^{i-1}(\varphi,\mu)\|_0\} + M(d,\mu)\sum_{-\infty<j<\infty}\|G^{i}_0(t_j,\varphi)-G^{i-1}_0(t_j,\varphi)\|, \tag{3.33}$$

где $\|u(\varphi,\mu)\|_0=\sup\|u(\varphi,\mu)\|$. Оценим разности $\varphi^{i}_t(\tau,\varphi)-\varphi^{i-1}_t(\tau,\varphi)$ и $G^{i}_0(\tau,\varphi)-G^{i-1}_0(\tau,\varphi)$. Из второго уравнения системы (3.9) в силу соотношений (3.11) и (3.15) получаем неравенство

$$\|\varphi^{i}_t(\tau,\varphi)-\varphi^{i-1}_t(\tau,\varphi)\|\leqslant L(d,\mu)\left|\int_{\tau}^{t}\{\|u^{i}(\varphi,\mu)-u^{i-1}(\varphi,\mu)\|_0 + \right.$$

$$\left. +(1+N(\mu))\|\varphi^{i}_s(\tau,\varphi)-\varphi^{i-1}_s(\tau,\varphi)\|\}\,ds\right|. \tag{3.34}$$

Применяя к неравенству (3.34) теорему 1.2 [133], находим

$$\|\varphi^{i}_t(\tau,\varphi)-\varphi^{i-1}_t(\tau,\varphi)\|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{1+N(\mu)}\|u^{i}(\varphi,\mu)-u^{i-1}(\varphi,\mu)\|_0\left(e^{L(d,\mu)(1+N(\mu))|t-\tau|}-1\right). \tag{3.35}$$

Поскольку $G^{i}_t(\tau,\varphi)$ удовлетворяет уравнению (3.5), то разность $G^{i}_t(\tau,\varphi)-G^{i-1}_t(\tau,\varphi)$ является решением уравнения

$$\frac{d}{dt}[G^{i}_t(\tau,\varphi)-G^{i-1}_t(\tau,\varphi)]=A(\varphi^{i}_t(\tau,\varphi))[G^{i}_t(\tau,\varphi)-G^{i-1}_t(\tau,\varphi)]+$$

$$+B(\varphi^{i}_t(\tau,\varphi))[G^{i}_{t-\Delta}(\tau,\varphi)-G^{i-1}_{t-\Delta}(\tau,\varphi)]+[A(\varphi^{i}_t(\tau,\varphi))-A(\varphi^{i-1}_t(\tau,\varphi))]\times$$

$$\times G^{i-1}_t(\tau,\varphi)+[B(\varphi^{i}_t(\tau,\varphi))-B(\varphi^{i-1}_t(\tau,\varphi))]G^{i-1}_{t-\Delta}(\tau,\varphi) \tag{3.36}$$

и, следовательно,

$$\|G^{i}_t(\tau,\varphi)-G^{i-1}_t(\tau,\varphi)\|\leqslant\frac{\|u^{i}(\varphi,\mu)-u^{i-1}(\varphi,\mu)\|_0}{1+N(\mu)}\times$$

$$\times\left\{K^2A_1\left|\frac{2}{2\gamma-L(d,\mu)(1+N(\mu))}+\frac{1-e^{-L(d,\mu)(1+N(\mu))|t-\tau|}}{L(d,\mu)(1+N(\mu))}\right|\times\right.$$

$$\times e^{-(\gamma-L(d,\mu)(1+N(\mu)))|t-\tau|}+K^2B_1e^{L(d,\mu)(1+N(\mu))\Delta}\left[\frac{1+e^{L(d,\mu)(1+N(\mu))\Delta}}{2\gamma-L(d,\mu)(1+N(\mu))}+\right.$$

$$+\frac{e^{(2\gamma+L(d,\mu)(1+N(\mu)))\Delta}-1}{2\gamma-L(d,\mu)(1+N(\mu))}+\frac{1-e^{-L(d,\mu)(1+N(\mu))\Delta}}{L(d,\mu)(1+N(\mu))}+$$

$$\left.\left.+\frac{1-e^{-L(d,\mu)(1+N(\mu))|t-\tau-\Delta|}}{L(d,\mu)(1+N(\mu))}\right]e^{-(\gamma-L(d,\mu)(1+N(\mu)))|t-\tau-\Delta|}\right\}. \tag{3.37}$$

С учетом оценок (3.35) и (3.37) неравенство (3.33) принимает вид

$$\| u^{i+1}(\varphi, \mu) - u^{i}(\varphi, \mu) \|_0 \leqslant s(\mu) \| u^{i}(\varphi, \mu) - u^{i-1}(\varphi, \mu) \|_0, \quad (3.38)$$

где

$$s(\mu) = L(d, \mu) K \Bigg[\frac{2 + e^{L(d,\mu)(1+N(\mu))\Delta}}{\gamma - L(d,\mu)(1+N(\mu))} + \frac{e^{L(d,\mu)(1+N(\mu))\Delta} - e^{-\gamma\Delta}}{\gamma + L(d,\mu)(1+N(\mu))} +$$

$$+ \frac{2 + e^{L(d,\mu)(1+N(\mu))\Delta} + e^{-\gamma\Delta}}{1 - e^{-(\gamma - L(d,\mu)(1+N(\mu)))h}} + \frac{e^{L(d,\mu)(1+N(\mu))\Delta} - e^{-\gamma\Delta}}{1 - e^{-(\gamma + L(d,\mu)(1+N(\mu)))h}} \Bigg] +$$

$$+ \frac{M(d,\mu) K^2}{1 + N(\mu)} \Bigg\{ \Bigg[\frac{2A_1}{2\gamma - L(d,\mu)(1+N(\mu))} + B_1 e^{L(d,\mu)(1+N(\mu))\Delta} \times$$

$$\times \frac{1 + e^{L(d,\mu)(1+N(\mu))\Delta}}{2\gamma - L(d,\mu)(1+N(\mu))} + \frac{e^{(2\gamma + L(d,\mu)(1+N(\mu)))\Delta} - 1}{2\gamma + L(d,\mu)(1+N(\mu))} +$$

$$+ \frac{1 - e^{-L(d,\mu)(1+N(\mu))\Delta}}{L(d,\mu)(1+N(\mu))} \Bigg] \Bigg(\frac{2}{\gamma - L(d,\mu)(1+N(\mu))} +$$

$$+ \frac{2}{1 - e^{-(\gamma - L(d,\mu)(1+N(\mu)))h}} \Bigg) + \frac{A_1 + B_1 e^{L(d,\mu)(1+N(\mu))\Delta}}{L(d,\mu)(1+N(\mu))} \times$$

$$\times \Bigg[\frac{2}{\gamma - L(d,\mu)(1+N(\mu))} - \frac{2}{\gamma} + \frac{2}{1 - e^{-(\gamma - L(d,\mu)(1+N(\mu)))h}} - \frac{2}{1 - e^{-\gamma h}} \Bigg] \Bigg\}.$$

Итерируя неравенство (3.38), получаем, что для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$, справедлива оценка

$$\| u^{i+1}(\varphi, \mu) - u^{i}(\varphi, \mu) \|_0 \leqslant [s(\mu)]^{i} \| u^{1}(\varphi, \mu) \|_0. \quad (3.39)$$

Выбрав $\mu^0 \in [0, \mu_2]$ настолько малым, чтобы для всех $\mu \in [0, \mu^0]$ выполнялись неравенства

$$L(d, \mu)(1 + N(\mu)) < \gamma, \quad s(\mu) < 1,$$

с учетом оценки (3.13) можно сделать вывод, что последовательность функций $u^{i}(\varphi, \mu)$ равномерно сходится при $i \to \infty$.

Из существования и сходимости последовательности инвариантных тороидальных множеств (3.8) следует теорема существования инвариантного тороидального множества системы (3.1).

Теорема 4.4 [71, 72]. *Предположим, что правая часть системы (3.1) удовлетворяет следующим условиям:*

1) для всех $\mu \in [0, \mu_0]$ *функции* $A(\varphi)$, $B(\varphi)$, $a(\varphi, y, \mu)$, $c(\varphi, \psi, y, z, \mu)$, $H_j(\varphi, \psi, y, z, \mu)$ — *периодические по* $\varphi, \psi = \varphi(t - \Delta)$ *с периодом* 2π *и определены для всех* y, $z = y(t - \Delta)$, *принадлежащих области*

$$\| y \| = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant d, \quad \| z \| \leqslant d, \quad \mu \in [0, \mu_0];$$

2) *функции* $A(\varphi)$, $B(\varphi)$, $c(\varphi, \psi, y, z, \mu)$, $a(\varphi, y, \mu)$; $H_j(\varphi, \psi, y, z, \mu)$ *удовлетворяют условиям*

$$\|a(\varphi, y, \mu)\| + \|c(\varphi, \psi, y, z, \mu)\| + \|H_j(\varphi, \psi, y, z, \mu)\| \leqslant M(d, \mu);$$

$$\|c(\varphi', \psi', y', z', \mu) - c(\varphi'', \psi'', y'', z'', \mu)\| + \|H_j(\varphi', \psi', y', z', \mu) - H_j(\varphi'', \psi'', y'', z'', \mu)\| \leqslant L(d, \mu)\{\|\varphi' - \varphi''\| + \|\psi' - \psi''\| + \|y' - y''\| + \|z' - z''\|\};$$

$$\|a(\varphi', y', \mu) - a(\varphi'', y'', \mu)\| \leqslant L(d, \mu)\{\|\varphi' - \varphi''\| + \|y' - y''\|\};$$

$$\|A(\varphi') - A(\varphi'')\| \leqslant A_1\|\varphi' - \varphi''\|, \quad A_1 > 0;$$

$$\|B(\varphi') - B(\varphi'')\| \leqslant B_1\|\varphi' - \varphi''\|, \quad B_1 > 0,$$

где $M(d, \mu)$, $L(d, \mu)$ — *положительные монотонно убывающие функции, обладающие свойствами:* $L(d, \mu) \to 0$, $M(d, \mu) \to 0$ *при* $d \to 0$, $\mu \to 0$;

3) *для любых достаточно малых по норме* $c_1(\varphi)$, $a_1(t, \varphi)$ *система дифференциальных уравнений*

$$\frac{dy(t)}{dt} = A(\varphi)y(t) + B(\varphi)y(t - \Delta) + c_1(\varphi),$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = a_1(\varphi)$$

имеет функцию Грина $G_1(\tau, \varphi)$ *задачи об инвариантных торах, удовлетворяющих для всех* t, $\tau \in (-\infty, \infty)$ *неравенству*

$$\|G_t(\tau, \varphi)\| \leqslant Ke^{-\gamma|t-\tau|}, \quad K > 0, \quad \gamma > 0;$$

4) *моменты времени* t_j, *функции* H_j *и запаздывание* Δ *удовлетворяют неравенствам*

$$H_{j+p} = H_j, \quad t_{j+1} - t_j \geqslant h, \quad h > \Delta \geqslant 0.$$

Тогда существует такое $\mu^0 \in [0, \mu_0]$, *что для всех* $\mu \in [0, \mu^0]$ *система уравнений* (4.1) *имеет инвариантное тороидальное множество* $\mathfrak{T}(\mu): y = u(\varphi, \mu)$, *удовлетворяющее по* φ *условию Липшица и для которого*

$$\lim_{\mu \to 0} \|u(\varphi, \mu)\| = 0.$$

§ 4. ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В ОКРЕСТНОСТИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО УСТОЙЧИВОГО ТОРОИДАЛЬНОГО МНОГООБРАЗИЯ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= b(\varphi(t), \varphi(t - \Delta), y(t), y(t - \Delta))\, y(t) + b_1(\varphi(t), \varphi(t - \Delta), \\ &\quad y(t), y(t - \Delta))\, y(t - \Delta) + c(\varphi(t), \varphi(t - \Delta)); \qquad (4.1) \\ \frac{d\varphi(t)}{dt} &= a(\varphi(t), y(t)), \end{aligned}$$

где $y = (y_1, y_2, \dots, y_s)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$; a, b, b_1, c — периодические по $\varphi(t)$, $\varphi(t-\Delta)$ с периодом 2π функции, определенные для всех y, $z = y(t-\Delta)$, принадлежащих области

$$D: \|y\| \leqslant d, \quad \|z\| \leqslant d; \tag{4.2}$$

Δ — постоянная величина, характеризующая запаздывание в системе. Предположим, что система (4.1) имеет достаточно гладкий инвариантный тор

$$\mathfrak{T}_m: y = u(\varphi), \tag{4.3}$$

где $u(\varphi)$ — периодическая по φ с периодом 2π функция. Предположим также, что функция $\psi(t) = \psi(t, \psi_0)$ определяет поток траекторий на торе $\mathfrak{T}_m$ и, следовательно, является решением системы дифференциальных уравнений на торе

$$\frac{d\psi}{dt} = a(\psi, u(\psi)), \tag{4.4}$$

принимающим значение ψ_0 при $t = t_0 = 0$.

Считая, что функции a, b, b_1, c — достаточно гладкие в окрестности тора $\mathfrak{T}_m$, преобразуем систему (4.1). Сделаем в ней замену переменных

$$y = u(\varphi) + \mu^2 x, \qquad \varphi = \psi + \mu\theta, \tag{4.5}$$

где x, θ — новые функции, μ — малый положительный параметр. В новых переменных эта система примет вид

$$\begin{gathered}\frac{dx(t)}{dt} = B(\psi(t), \psi(t-\Delta), \theta(t), \theta(t-\Delta), x(t), x(t-\Delta), \mu)\, x(t) + \\ + B_1(\psi(t), \psi(t-\Delta), \theta(t), \theta(t-\Delta), x(t), x(t-\Delta), \mu)\, x(t-\Delta); \\ \frac{d\theta(t)}{dt} = A_1(\psi(t), \theta(t), \mu)\, \theta(t) + \mu A_2(\psi(t), \theta(t), x(t), \mu)\, x(t),\end{gathered} \tag{4.6}$$

где

$$\begin{gathered}A_1(\psi, \theta, \mu) = \int_0^1 \frac{\partial a(\psi + \tau\mu\theta, u(\psi + \mu\theta))}{\partial\varphi}\, d\tau + \frac{\partial a(\psi, u(\psi))}{\partial x} \int_0^1 \frac{\partial u(\psi + \tau\mu\theta)}{\partial\varphi}\, d\tau, \\ A_2(\psi, \theta, x, \mu) = \int_0^1 \frac{\partial a(\psi + \mu\theta, u(\psi + \mu\theta) + \tau\mu^2 x)}{\partial y}\, d\tau;\end{gathered} \tag{4.7}$$

$$\begin{gathered}\tilde{b}(\psi(t), \psi(t-\Delta), \theta(t), \theta(t-\Delta), x(t), x(t-\Delta), \mu) \equiv b(\psi + \mu\theta, \psi_\Delta + \\ + \mu\theta_\Delta, \mu^2 x, \mu^2 x_\Delta) = b(\psi + \mu\theta, \psi_\Delta + \mu\theta_\Delta; u(\varphi) + \mu^2 x, u(\varphi_\Delta) + \mu^2 x_\Delta) + \\ + \int_0^1 \frac{\partial b(\psi + \mu\theta, \psi_\Delta + \mu\theta_\Delta, u(\varphi) + \tau\mu^2 x, u(\varphi_\Delta) + \mu^2 x_\Delta)}{\partial y}\, d\tau u(\varphi) +\end{gathered}$$

$$+\int_0^1 \frac{\partial b_1(\psi+\mu\theta, \psi_\Delta+\mu\theta_\Delta, u(\varphi)+\tau\mu^2 x, u(\varphi_\Delta+\mu^2 x_\Delta)}{\partial y} d\tau u(\varphi_\Delta) -$$

$$-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\int_0^1 \frac{\partial a(\varphi, u(\varphi)+\tau\mu^2 x)}{\partial y} d\tau, \tag{4.8}$$

$$B_1(\psi(t), \psi(t-\Delta), \theta(t), \theta(t-\Delta), x(t), x(t-\Delta), \mu) \equiv b_1(\psi+\mu\theta, \psi_\Delta +$$

$$+\mu\theta_\Delta, \mu^2 x, \mu^2 x_\Delta) = b_1(\psi+\mu\theta, \psi_\Delta+\mu\theta_\Delta, u(\varphi)+\mu^2 x, u(\varphi_\Delta)+\mu^2 x_\Delta)+$$

$$+\int_0^1 \frac{\partial b(\psi+\mu\theta, \psi_\Delta+\mu\theta_\Delta, u(\varphi)+\tau\mu^2 x, u(\varphi_\Delta)+\tau\mu^2 x_\Delta)}{\partial y_\Delta} d\tau u(\varphi)+$$

$$+\int_0^1 \frac{\partial b_1(\psi+\mu\theta, \psi_\Delta+\mu\theta_\Delta, u(\varphi)+\tau\mu^2 x, u(\varphi_\Delta+\tau\mu^2 x_\Delta)}{\partial y_\Delta} d\tau u(\varphi_\Delta).$$

Будем предполагать, что правая часть системы (4.1) в области (4.2) удовлетворяет условиям, обеспечивающим для некоторого достаточно малого μ_0 в области

$$\|x\| \leqslant 1, \qquad \|x_\Delta\| \leqslant 1, \qquad \mu \leqslant \mu_0 \tag{4.9}$$

выполнение следующих условий для правой части системы (4.6):

$$\begin{gathered}
\|A_1(\psi, \theta, \mu)\| \leqslant M_1; \qquad \|A_2(\psi, \theta, x, \mu)\| \leqslant M_1; \\
\|B(\psi, \psi_\Delta, \theta, \theta_\Delta, x, x_\Delta, \mu)\| \leqslant M_2; \\
\|P_1(\psi, \psi_\Delta, \theta, \theta_\Delta, x, x_\Delta, \mu)\| \leqslant M_3; \\
\|A_1(\psi, \theta, \mu) - A_1(\psi, \bar\theta, \mu)\| \leqslant \mu K_1 \|\theta - \bar\theta\|; \\
\|A_2(\psi, \theta, x, \mu) - A_2(\psi, \bar\theta, \bar x, \mu)\| \leqslant \mu K_1(\|\theta - \bar\theta\| + \|x - \bar x\|); \\
\|B(\psi, \psi_\Delta, \theta, \theta_\Delta, x, x_\Delta, \mu) - B(\psi, \psi_\Delta, \bar\theta, \bar\theta_\Delta, \bar x, \bar x_\Delta, \mu)\| \leqslant \mu K_2(\|\theta - \\
- \bar\theta\| + \|\theta_\Delta - \bar\theta_\Delta\| + \|x - \bar x\| + \|x_\Delta - \bar x_\Delta\|); \\
\|B_1(\psi, \psi_\Delta, \theta, \theta_\Delta, x, x_\Delta, \mu) - P_1(\psi, \psi_\Delta, \bar\theta, \bar\theta_\Delta, \bar x, \bar x_\Delta, \mu)\| \leqslant \\
\leqslant \mu K_3(\|\theta - \bar\theta\| + \|\theta_\Delta - \bar\theta_\Delta\| + \|x_\Delta - \bar x_\Delta\| + \|x - \bar x\|).
\end{gathered} \tag{4.10}$$

Из соотношений (4.7) и (4.8) следуют такие тождества:

$$A_1(\psi, \theta, 0) \equiv A_1(\psi, 0, \mu) \equiv \frac{\partial a(\psi, u(\psi))}{\partial\varphi} + \frac{\partial a(\psi, u(\psi))}{\partial y}\frac{\partial u(\psi)}{\partial\varphi};$$

$$A_2(\psi, \theta, x, 0) \equiv A_2(\psi, 0, 0, \mu) \equiv \frac{\partial a(\psi, u(\psi))}{\partial y};$$

$$B(\psi, \psi_\Delta, \theta, \theta_\Delta, x, x_\Delta, 0) \equiv B(\psi, \psi_\Delta, 0, 0, 0, 0, \mu) \equiv b(\psi, \psi_\Delta, 0, 0) \equiv$$

$$\equiv b(\psi, \psi_\Delta, u(\psi), u(\psi_\Delta)) + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial b(\psi, \psi_\Delta, u(\psi), u(\psi_\Delta))}{\partial u_\nu(\psi)} u_\nu(\psi) +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial b_1(\psi, \psi_\Delta, u(\psi), u(\psi_\Delta))}{\partial u_\nu(\psi_\Delta)} u_\nu(\psi_\Delta) - \frac{\partial u}{\partial \psi} \frac{\partial a(\psi, u(\psi))}{\partial y}; \quad (4.11)$$

$$B_1(\psi, \psi_\Delta, \theta, \theta_\Delta, x, x_\Delta, 0) \equiv B_1(\psi, \psi_\Delta, 0, 0, 0, 0, \mu) \equiv b_1(\psi, \psi_\Delta, 0, 0) \equiv$$

$$\equiv b_1(\psi, \psi_\Delta, u(\psi), u(\psi_\Delta)) + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial b(\psi, \psi_\Delta, u(\psi), u(\psi_\Delta))}{\partial u_\nu(\psi_\Delta)} u_\nu(\psi) +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial b_1(\psi, \psi_\Delta, u(\psi), u(\psi_\Delta))}{\partial u_\nu(\psi_\Delta)} u_\nu(\psi_\Delta).$$

Ради сокращения записи обозначим полученные выражения (4.11) следующим образом:

$$A_1(\psi, \theta, 0) = A_1^0(\psi); \qquad A_2(\psi, \theta, x, 0) = A_2^0(\psi);$$
$$B(\psi, \psi_\Delta, 0, \theta_\Delta, x, x_\Delta, 0) = b^0(\psi, \psi_\Delta);$$
$$B(\psi, \psi_\Delta, \theta, \theta_\Delta, x, x_\Delta, 0) = b_1^0(\psi, \psi_\Delta):$$

Теорема 4.5 [97]. *Пусть правая часть системы (4.1) удовлетворяет условиям:*

1) функции $a(\varphi, y)$, $b(\varphi, \varphi_\Delta, y, y_\Delta)$, $b_1(\varphi, \varphi_\Delta, y, y_\Delta)$, $c(\varphi, \varphi_\Delta)$ определены в области D, являются периодическими по φ_ν, $\varphi_{\nu\Delta}$, $\nu = 1, 2, \ldots, m$, с периодом 2π и принадлежат пространству $C^1_{\text{Lip}}(D)$;

2) система уравнений (4.1) имеет в пространстве $C^1_{\text{Lip}}(D)$ инвариантный тор $\mathfrak{T}_m : y = u(\varphi)$, принадлежащий области D вместе с некоторой своей окрестностью;

3) для линейной системы уравнений

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = A_1^0(\psi)\,\theta(t);$$
$$\frac{dx(t)}{dt} = b^0(\psi(t), \psi(t-\Delta))\,x(t) + b_1^0(\psi(t), \psi(t-\Delta))\,x(t-\Delta), \quad (4.12)$$

где $\psi(t) = \psi(t, \psi_0)$ — поток траекторий на торе, определяемый системой уравнений (4.4), выполняются условия:

a) $$\min_{\|\xi\|=1} \langle A_1^0(\psi)\,\xi, \xi\rangle = \alpha(\psi) \geqslant \min_{\psi} \alpha(\psi) = \alpha; \quad (4.13)$$
$(\alpha < 0)$

б) второе уравнение системы (4.12) имеет функцию Грина $G_0(t, s)$ задачи об ограниченных решениях, $G_0(t, s) \equiv 0$ при $t<s$, $G_0(s, s) = E$, удовлетворяющую неравенству

$$\| G_0(t, s) \| \leqslant c e^{-\gamma(t-s)}, \quad t > s, \tag{4.14}$$

где c, γ — положительные постоянные, причем

$$\varkappa + \gamma > 0. \tag{4.15}$$

Тогда можно указать такое μ^0, что для всех $0<\mu\leqslant\mu^0$ любое решение

$$\varphi(t) = \varphi_t(y_0(t), \varphi_0(t)), \quad y(t) = y_t(y_0(t), \varphi_0(t)) \tag{4.16}$$

системы дифференциальных уравнений (4.1) с начальными функциями $\varphi(t) = \varphi_0(t)$, $y(t) = y_0(t)$ на начальном множестве $-\Delta\leqslant t\leqslant \leqslant 0$, принадлежащими области

$$\| y_0(t) - u(\varphi_0(t)) \| \leqslant \mu^2, \qquad \| \varphi_0(t) - \psi(t) \| \leqslant \mu,$$

экспоненциально притягивается к некоторому решению $\psi(t) = \psi(t, \psi_0)$, $y(t) = u(\psi(t, \psi_0))$ на торе $\mathfrak{T}_m$ по закону

$$\| \varphi_t(y_0(t), \varphi_0(t)) - \psi(t, \psi_0) \| \leqslant \mu e^{-(\gamma-\varepsilon)t}, \tag{4.17}$$

$$\| x_t(x_0(t), \varphi_0(t)) - u(\psi(t, \psi_0)) \| \leqslant \overline{\overline{K}} \mu e^{-(\gamma-\varepsilon)t}, \quad t \geqslant 0,$$

где $\varepsilon = \varepsilon(\mu^0)$ — достаточно малая положительная величина: $\varepsilon(\mu^0) \to 0$ при $\mu^0 \to 0$; $\overline{\overline{K}}$ — положительная величина, не зависящая от μ.

Доказательство. Применим обычный итерационный процесс, выбирая в качестве нулевого приближения $\theta^{(0)}(t) \equiv 0$, $y^{(0)}(t) \equiv 0$ и полагая во всех последующих приближениях $y^{(n)}(t) = w(t)$, $\theta^{(n)}(t) = v(t)$ при $-\Delta \leqslant t \leqslant 0$, где $w(t)$, $v(t)$ — некоторые функции из класса $C(-\Delta, 0)$; последующие приближения к решениям системы (4.6) определим согласно формулам

$$\begin{gathered}\frac{dx^{(n)}(t)}{dt} = B(\psi(t), \psi(t-\Delta), \theta^{(n-1)}(t), \theta^{(n-1)}(t-\Delta), x^{(n-1)}(t), \\ x^{(n-1)}(t-\Delta), \mu)\, x^{(n)}(t) + B_1(\psi(t), \psi(t-\Delta)\, \theta^{(n-1)}(t), \theta^{(n-1)}(t-\Delta), \\ x^{(n-1)}(t), x^{(n-1)}(t-\Delta), \mu)\, x^{(n)}(t-\Delta); \\ \frac{d\theta^{(n)}(t)}{dt} = A_1(\psi(t), \theta^{(n-1)}(t), \mu)\, \theta^{(n)}(t) + \mu A_2(\psi(t), \theta^{(n-1)}(t), x^{(n)}(t), \mu)\, x^{(n)}(t).\end{gathered} \tag{4.18}$$

Полагая в (4.18) $n = 1$, для $x^{(1)}(t)$ и $\theta^{(1)}(t)$ получим систему уравнений

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} = b^0(\psi(t)\, \psi(t-\Delta))\, x^{(1)}(t) + b_1^0(\psi(t), \psi(t-\Delta))\, x^{(1)}(t-\Delta);$$

$$\frac{d\theta^{(1)}(t)}{dt} = A_1^0(\psi(t)\, \theta^{(1)}(t) + \mu A_2(\psi(t), 0, x^{(1)}(t), \mu)\, x^{(1)}(t-\Delta),$$

ограниченное решение которой запишем в виде

$$x^{(1)}(t)=G_0(t,0)w(0)+\int_{-\Delta}^{0}G_0(t,s+\Delta)b_1^0(\psi(s+\Delta),\psi(s))w(s)\,ds;$$

$$\theta^{(1)}(t)=-\mu\int_{0}^{\infty}\Omega_s^t(A_1^0)A_2(\psi(s),0,x^{(1)}(s),\mu)x^{(1)}(s)\,ds, \tag{4.19}$$

где $\Omega_s^t(A_1^0)$ — фундаментальная матрица решений первого из уравнений (4.12); $G_0(t,s)$ — функция Грина задачи об ограниченных решениях.

Используя неравенства (4.10) и (4.14), из первого соотношения (4.19) для всех $t\geqslant 0$ получаем оценку

$$\|x^{(1)}(t)\|\leqslant ce^{-\gamma t}\delta+\int_{-\Delta}^{0}Ke^{-\gamma(t-s-\Delta)}M_3\delta\,ds\leqslant c'e^{-\gamma t}\delta, \tag{4.20}$$

где обозначено

$$c'=c\left[1+\frac{M_3}{\gamma}(e^{\gamma\Delta}-1)\right],\quad \delta=\max_{-\Delta\leqslant t\leqslant 0}\|w(t)\|.$$

Если положить $c_1=\max(c',1)$, то можно записать неравенство

$$\|x^{(1)}(t)\|\leqslant c_1e^{-\gamma t}\delta \tag{4.21}$$

для всех $t\geqslant -\Delta$. С помощью неравенств (4.10) и (4.21) из соотношения (4.19) для всех $t\geqslant 0$ получаем оценку

$$\|\theta^{(1)}(t)\|\leqslant\mu\int_{t}^{\infty}e^{\alpha(t-s)}M_1c_1e^{-\gamma s}\delta\,ds\leqslant\mu M_1c_1\delta e^{\alpha t}\int_{t}^{\infty}e^{-(\alpha+\gamma)s}ds\leqslant\frac{\mu c_1M_1}{\alpha+\gamma}e^{-\gamma t}\delta, \tag{4.22}$$

поскольку условие (4.13) для произвольных θ_0 обеспечивает неравенство

$$\|\Omega_s^t(A_1^0)\theta_0\|\leqslant e^{\alpha(t-s)}\|\theta_0\|,\quad 0\leqslant t\leqslant s.$$

Выберем начальную функцию $v(t)$, $-\Delta\leqslant t\leqslant 0$, таким образом, что $\max\limits_{-\Delta\leqslant t\leqslant 0}\|v(t)\|\leqslant e^{-\gamma\Delta}$ и μ_0 настолько мало, что выполняются неравенства

$$\delta c_1<1,\quad \mu_0\mu_1/(\alpha+\gamma)<1.$$

Тогда функции $\theta^{(1)}(t)$, $x^{(1)}(t)$ при всех $t\geqslant -\Delta$ будут принадлежать области (4.9) и удовлетворять неравенствам

$$\|x^{(1)}(t)\|\leqslant e^{-\gamma t},\quad \|\theta^{(1)}(t)\|\leqslant e^{-\gamma t}. \tag{4.23}$$

Зафиксируем достаточно малое положительное число ε ($2\varepsilon<\alpha+\gamma$, $\varepsilon<\gamma$) и будем считать μ_0 настолько малым, что выполняются неравенства

$$\mu_0\mu_1/(\alpha+\gamma-2\varepsilon)<1,\quad 2\mu_0K_1<\varepsilon,\quad 4\mu_0K_2<\varepsilon,\quad 4\mu_0e^{\gamma\Delta}K_3<\varepsilon. \tag{4.24}$$

Тогда при всех $t \geqslant 0$ и $\mu \leqslant \mu_0$ имеют место следующие оценки:

$$\| B(\psi, \psi_\Delta, \theta^{(1)}, \theta^{(1)}_\Delta, x^{(1)}, x^{(1)}_\Delta, \mu) - b^0(\psi, \psi_\Delta) \| \leqslant \mu K_2 (\| \theta^{(1)} \| + \| \theta^{(1)}_\Delta \| +$$
$$+ \| x^{(1)} \| + \| x^{(1)}_\Delta \|) \leqslant 4\mu K_2 < \varepsilon;$$
$$\| B_1(\psi, \psi_\Delta, \theta^{(1)}, \theta^{(1)}_\Delta, x^{(1)}, x^{(1)}_\Delta, \mu) - b^0_1(\psi, \psi_\Delta) \| \leqslant \mu K_3 (\| \theta^{(1)} \| + \| \theta^{(1)}_\Delta \| +$$
$$+ \| x^{(1)} \| + \| x^{(1)}_\Delta \|) \leqslant 4\mu K_3 < \varepsilon; \qquad (4.25)$$
$$\| A_1(\psi, \theta^{(1)}, \mu) - A^{(0)}_1(\psi) \| \leqslant \mu K_1 \| \theta^{(1)} \| \leqslant \mu K_1 < \varepsilon.$$

Полагая в соотношениях (4.18) $n = 2$, для функций $x^{(2)}(t)$ и $\theta^{(2)}(t)$ получаем систему уравнений

$$\frac{dx^{(2)}(t)}{dt} = B(\psi(t), \psi(t-\Delta), \theta^{(1)}(t), \theta^{(1)}(t-\Delta), x^{(1)}(t), x^{(1)}(t-\Delta), \mu) \times$$
$$\times x^{(2)}(t) + B_1(\psi(t), \psi(t-\Delta), \theta^{(1)}(t), \theta^{(1)}(t-\Delta), x^{(1)}(t),$$
$$x^{(1)}(t-\Delta), \mu)\, x^{(2)}(t-\Delta);$$
$$\frac{d\theta^{(2)}(t)}{dt} = A_1(\psi(t), \theta^{(1)}(t), \mu)\, \theta^2(t) + \mu A_2(\psi(t), \theta^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \mu)\, x^{(2)}(t). \qquad (4.26)$$

Перепишем первое уравнение этой системы в виде

$$\frac{dx^{(2)}(t)}{dt} = [b^0(\psi, \psi_\Delta) + (B(\psi, \psi_\Delta, \theta^{(1)}, \theta^{(1)}_\Delta, x^{(1)}, x^{(1)}_\Delta, \mu) - b^0(\psi, \psi_\Delta))]\, x^{(2)}(t) +$$
$$+ [b^0_1(\psi, \psi_\Delta) + (B_1(\psi, \psi_\Delta, \theta^{(1)}, \theta^{(1)}_\Delta, x^{(1)}, x^{(1)}_\Delta, \mu) - b^0_1(\psi, \psi_\Delta))]\, x^{(2)}(t-\Delta). \qquad (4.27)$$

Согласно лемме 2.2 и неравенству (4.25) заключаем, что уравнение (4.27) имеет функцию Грина задачи об ограниченных решениях, которая удовлетворяет неравенству

$$\| G_1(t, s) \| \leqslant c_2 e^{-(\gamma-\varepsilon)(t-s)} \qquad (4.28)$$

при всех $t > s$ с положительной постоянной c_2. Переписывая второе уравнение (4.26) в виде

$$\frac{d\theta^{(2)}(t)}{dt} = [A^0_1(\psi) + (A_1(\psi, \theta^{(1)}, \mu) - A^0_1(\psi))]\, \theta^{(2)}(t) + \mu A_2(\psi, \theta^{(1)}, x^{(2)})\, x^{(2)}, \qquad (4.29)$$

с помощью неравенств (4.13) и (4.25) убеждаемся в справедливости оценки

$$\min_{\|\xi\|=1} \langle A_1(\psi, \theta^{(1)}, \mu)\, \xi, \xi \rangle \geqslant \alpha - \varepsilon, \qquad (4.30)$$

из которой следует неравенство

$$\| \Omega^t_s (A_1(\psi, \theta^{(1)}, \mu))\, \theta_0 \| \leqslant e^{(\alpha-\varepsilon)(t-s)} \| \theta_0 \| \qquad (4.31)$$

для всех $0 \leqslant t \leqslant s$ и произвольных θ_0. Ограниченное при $t \geqslant 0$ решение системы уравнений (4.26) определим соотношениями

$$\theta^{(2)}(t) = -\mu \int_t^{\infty} \Omega_s^t (A_1(\psi, \theta^{(1)}, \mu)) A_2(\psi, \theta^{(1)}, x^{(2)}, \mu) x^{(2)}(s)\, ds;$$

$$x^{(2)}(t) = G_1(t, 0)\, w(0) + \int_{-\Delta}^{0} G_1(t, s+\Delta) B_1(\psi(s+\Delta), \psi(s), \theta^{(1)}(s+\Delta),$$
$$\theta^{(1)}(s), x^{(1)}(s+\Delta), x^{(1)}(s), \mu)\, w(s)\, ds, \quad (4.32)$$

причем $\theta^{(2)}(t) = v(t)$, $x^{(2)} = w(t)$ при $-\Delta \leqslant t \leqslant 0$.

Аналогично оценке $x^{(1)}(t)$ с учетом неравенств (4.10), (4.28) получаем неравенство

$$\| x^{(2)}(t) \| \leqslant c_2 e^{-(\gamma-\varepsilon)t}\delta + \int_{-\Delta}^{0} c_2 e^{-(\gamma-\varepsilon)(t-s-\Delta)} M_3 \delta\, ds \leqslant c_2' e^{-(\gamma-\varepsilon)t}\delta, \quad t \geqslant 0, \quad (4.33)$$

где

$$c_2' = c_2 \left[1 + \frac{M_3}{\gamma-\varepsilon} (e^{(\gamma-\varepsilon)\Delta} - 1) \right].$$

Положив $c_3 = \max(1, c_2^1)$, убеждаемся, что при всех $t \geqslant -\Delta$

$$\| x^{(2)}(t) \| \leqslant c_3 e^{-(\gamma-\varepsilon)t}\delta. \quad (4.34)$$

Предположим, что функция $w(t)$ такова, что выполняется неравенство $\delta c_3 < 1$. Тогда при $t \geqslant 0$ и $\mu \leqslant \mu_0$ функция $x^{(2)}(t)$ будет принадлежать области (4.9). Из первого соотношения (4.32) получаем оценку

$$\| \theta^{(2)}(t) \| \leqslant \mu \int_t^{\infty} e^{(\alpha-\varepsilon)(t-s)} M_1 c_3 e^{-(\gamma-\varepsilon)s}\delta\, ds \leqslant \frac{\mu M_1}{\alpha+\gamma-2\varepsilon} e^{-(\gamma-\varepsilon)t}\delta, \quad t \geqslant 0. \quad (4.35)$$

Таким образом, при указанном выборе $w(t)$ функции $\theta^{(2)}(t)$ и $x^{(2)}(t)$ при всех $t \geqslant 0$ принадлежат области (4.9) и удовлетворяют неравенствам

$$\| \theta^{(2)}(t) \| \leqslant e^{-(\gamma-\varepsilon)t}, \quad \| x^{(2)}(t) \| \leqslant e^{-(\gamma-\varepsilon)t}.$$

Положим $\rho = \min(1/c_1, 1/c_3)$; $c_0 = \max(c_1, c_3)$;

$$A_1^{(n-1)} = A_1(\psi, \theta^{(n-1)}, \mu);$$

$$B_1^{(n-1)}(t, t-\Delta, \mu) = B_1(\psi, \psi_\Delta, \theta^{(n-1)}, \theta_\Delta^{(n-1)}, y^{(n-1)}, y_\Delta^{(n-1)}, \mu); \quad (4.36)$$

$$B^{(n-1)}(t, t-\Delta, \mu) = B(\psi, \psi_\Delta, \theta^{(n-1)}, \theta_\Delta^{(n-1)}, y^{(n-1)}, y_\Delta^{(n-1)}, \mu).$$

Предположим, что функции $x^{(n-1)}(t)$, $\theta^{(n-1)}(t)$ удовлетворяют неравенствам

$$\|\theta^{(n-1)}(t)\| \leqslant c_0 e^{-(\gamma-\varepsilon)t}\delta, \quad \|x^{(n-1)}(t)\| \leqslant c_0 e^{-(\gamma-\varepsilon)t}\delta \tag{4.37}$$

($t \geqslant 0$, $\mu \leqslant \mu^0$), и покажем, что эти неравенства справедливы для $x^{(n)}(t)$ и $\theta^{(n)}(t)$. Действительно, n-е приближения $\theta^{(n)}(t)$ и $x^{(n)}(t)$ определяются с помощью соотношений

$$\theta^{(n)}(t) = -\mu \int\limits_t^{\infty} \Omega_s^t (A_1^{(n-1)}) A_2(\psi, \theta^{(n-1)}, x^{(n)}) x^{(n)}(s)\, ds;$$

$$x^{(n)}(t) = G_{n-1}(t, 0)\, w(0) + \int\limits_{-\Delta}^{0} G_{n-1}(t, s+\Delta) B_1^{(n-1)}(s+\Delta, s, \mu)\, w(s)\, ds; \tag{4.38}$$

$x^{(n)}(t) = w(t)$, $\theta^{(n)} = v(t)$ при $t \in [-\Delta, 0]$, причем функции $w(t)$ и $v(t)$ удовлетворяют неравенствам $\delta < \rho$, $\max\limits_{t\in[-\Delta,0]} \|v(t)\| \leqslant e^{-\lambda\Delta}$. С учетом неравенств (4.10), (4.24) и (4.37) при всех $t \geqslant 0$ получаем

$$\|A_1^{(n-1)} - A_1^0\| \leqslant \mu K_1 \|\theta^{(n-1)}(t)\| \leqslant \mu K_1 < \varepsilon;$$

$$\|B^{(n-1)} - b^0\| \leqslant \mu K_2 (\|\theta^{(n-1)}(t)\| + \|\theta^{(n-1)}(t-\Delta)\| + \|y^{(n-1)}(t)\| +$$
$$+ \|y^{(n-1)}(t-\Delta)\|) \leqslant 4\mu K_2 < \varepsilon; \tag{4.39}$$

$$\|B_1^{(n-1)} - b_1^0\| \leqslant \mu K_3 (\|\theta^{(n-1)}(t)\| + \|\theta^{(n-1)}(t-\Delta)\| + \|y^{(n-1)}(t)\| +$$
$$+ \|y^{(n-1)}(t-\Delta)\|) \leqslant 4\mu K_3 < \varepsilon.$$

Аналогично неравенству (4.30) из первого соотношения (4.39) легко получить неравенство

$$\min_{\|\xi\|=1} \langle A_1^{(n-1)}\xi, \xi\rangle \geqslant \alpha - \varepsilon,$$

из которого следует оценка

$$\|\Omega_s^t (A_1^{(n-1)})\, \theta_0\| \leqslant e^{(\alpha-\varepsilon)(t-s)} \|\theta_0\| \tag{4.40}$$

для всех $0 \leqslant t \leqslant s$ и произвольного θ_0. Два последних неравенства (4.39) обеспечивают существование функции Грина $G_{n-1}(t, s)$ задачи об ограниченных решениях системы уравнений (4.18), удовлетворяющей неравенству

$$\|G_{n-1}(t, s)\| \leqslant c_2 e^{-(\gamma-\varepsilon)(t-s)}, \quad t > s. \tag{4.41}$$

Из соотношений (4.38) с учетом неравенств (4.40) и (4.41) получаем

$$\| x^{(n)}(t) \| \leqslant c_2 e^{-(\gamma-\varepsilon)}\delta + \int_{-\Delta}^{0} c_2 e^{-(\gamma-\varepsilon)(t-s-\Delta)} M_3 \delta ds \leqslant c_3 e^{-(\gamma-\varepsilon)t}\delta \leqslant c_0 e^{-(\gamma-\varepsilon)t}\delta;$$

$$\| \theta^{(n)}(t) \| \leqslant \mu \int_t^{\infty} M_1 c_0 e^{-(\gamma-\varepsilon)s} e^{(\alpha-\varepsilon)(t-s)} M_3 \delta ds \leqslant \frac{\mu M_1}{\alpha+\gamma-2\varepsilon} e^{-(\gamma-\ )t}\delta \leqslant$$

$$\leqslant c_0 e^{-(\gamma-\varepsilon)t}\delta, \tag{4.42}$$

что и требовалось доказать.

С помощью метода полной математической индукции можно сделать вывод, что последовательные приближения $x^{(n)}(t)$, $\theta^{(n)}(t)$ для всех $t \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant \mu^0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ удовлетворяют неравенствам (4.37). Кроме того, эти функции непрерывно зависят от параметра $\psi_0 \in \mathfrak{T}_m$, поскольку функция $a(\varphi, u(\varphi))$ принадлежит пространству $C^1_{\mathrm{Lip}}(D)$ и, следовательно, функция $\psi(t) = \psi(t, \psi_0)$ как решение уравнения (4.4) является непрерывной функцией $\psi_0 \in \mathfrak{T}_m$. Функции $\Omega^t_s(A_1^{(n-1)})$, $x^{(n)}(t)$, $\theta^{(n)}(t)$ также будут непрерывными функциями $\psi_0 \in \mathfrak{T}_m$.

Докажем теперь сходимость последовательностей $\{x^{(n)}(t)\}$ и $\{\theta^{(n)}(t)\}$. Если обозначить $r_{n+1}(t) = x^{(n+1)}(t) - x^{(n)}(t)$, $\eta_{n+1}(t) = \theta^{(n+1)}(t) - \theta^{(n)}(t)$, то, учитывая (4.18), получаем, что $r_{n+1}(t)$ и $\eta_{n+1}(t)$ будут удовлетворять уравнениям

$$\frac{dr_{n+1}(t)}{dt} = B^{(n)} r_{n+1}(t) + B_1^{(n)} r_{n+1}(t-\Delta) + (B^{(n)} - B^{(n-1)}) x^{(n)}(t) +$$

$$+ (B_1^{(n)} - B_1^{(n-1)}) x^{(n-1)}(t-\Delta);$$

$$\eta_{n+1}(t) = -\mu \int_t^{\infty} [\Omega^t_s(A_1^{(n)}) A_2(\psi(s), \theta^{(n)}(s), x^{(n+1)}(s), \mu) x^{(n+1)}(s) -$$

$$- \Omega^t_s(A_1^{(n-1)}) A_2(\psi(s), \theta^{(n-1)}(s), x^{(n)}(s), \mu) x^{(n)}(s)] ds. \tag{4.43}$$

В силу того, что $r_{n+1}(t) = 0$ при $t \in [-\Delta, 0]$, ограниченное решение $r_{n+1}(t)$ первого уравнения (4.43) при $t \geqslant 0$ определяется выражением

$$r_{n+1}(t) = \int_0^t G_n(t, s) [(B^{(n)} - B^{(n-1)}) x^{(n)}(s) + (B_1^{(n)} - B_1^{(n-1)}) x^{(n)}(s-\Delta)] ds. \tag{4.44}$$

Оценивая (4.44) с учетом неравенств (4.10), (4.37) и (4.41), получаем

$$\| r_{n+1}(t) \| \leqslant \int_0^t c_2 e^{-(\gamma-\varepsilon)(t-s)} \mu K_2 (\| r_n(s) \| + \| r_n(s-\Delta) \| + \| \eta_n(s) \|) \times$$

$$\times c_0 e^{-(\gamma-\varepsilon)s}\delta ds + \int_0^t c_2 e^{-(\gamma-\varepsilon)(t-s)} \mu K_3 (\| r_n(s) \| + \| r_n(s-\Delta) \| +$$

$$+ \| \eta_n(s) \| + \| \eta_n(s-\Delta) \|) \| x^{(n)}(s-\Delta) \| ds. \tag{4.45}$$

Поскольку при $t \in [-\Delta, 0]$ $\eta_n(t) = r_n(t)$, то имеют место соотношения $\| r_n(t-\Delta) \| = \| r_n(t) \|$, $\| \eta(t-\Delta) \| = \| \eta(t) \|$, $t \geqslant 0$. Производя замену $s - \Delta = s_1$, из неравенства (4.45) находим

$$\| r_{n+1}(t) \| \leqslant 2\mu K_2 c_2 c_0 \delta e^{-(\gamma-\varepsilon)t} \int_0^t (\| r_n(s) \| + \| \eta_n(s) \|)\, ds +$$

$$+ 2\mu K_3 c_2 \int_{-\Delta}^{t-\Delta} e^{-(\gamma-\varepsilon)(t-s_1-\Delta)} (\| r_n(s_1+\Delta) \| + \| \eta_n(s_1+\Delta) \|) \| x^{(n)}(s_1) \| ds_1 \leqslant$$

$$\leqslant 2\mu K_2 c_2 c_0 \delta (\| r_n(t) \|_0 + \| \eta_n(t) \|_0) e^{-(\gamma-\varepsilon)t} + \frac{2\mu K_3 c_2}{\gamma-\varepsilon} (\| r_n(t) \|_0 +$$

$$+ \| \eta_n(t) \|_0)\ \delta e^{-(\gamma-\varepsilon)t} e^{(\ \ -\varepsilon)\Delta} (1 - e^{-(\gamma-\varepsilon)\Delta}) + 2\mu K_3 c_2 (\| r_n(t) \|_0 +$$

$$+ \| \eta_n(t) \|_0) e^{-(\gamma-\varepsilon)t} e^{(\gamma-\varepsilon)\Delta} \int_0^t e^{(\gamma-\varepsilon)s_1} c_0 \delta e^{-(\gamma-\varepsilon)s_1} ds_1 \leqslant 2\mu c_2 c_0 e^{-(\gamma-\varepsilon)t} \times$$

$$\times t (\| r_n(t) \|_0 + \| \eta_n(t) \|_0)(K_2 + K_3 e^{\gamma\Delta}) \delta + \frac{2\mu K_3 c_2}{\gamma-\varepsilon} \delta e^{(\gamma-\varepsilon)\Delta} e^{-(\gamma-\varepsilon)t} \times$$

$$\times (\| r_n(t) \|_0 + \| \eta_n(t) \|_0). \qquad (4.46)$$

Перепишем второе соотношение (4.43) в виде

$$\eta_{n+1}(t) = -\mu \int_t^\infty \{[\Omega_s^t(A_1^{(n)}) - \Omega_s^t(A_1^{(n-1)})] A_2(\psi(s), \theta^{(n)}(s), x^{(n+1)}(s), \mu) \times$$

$$\times x^{(n+1)}(s) + \Omega_s^t(A_1^{n-1}) A_2(\psi(s), \theta^{(n)}(s), x^{(n+1)}(s), \mu) [x^{(n+1)}(s) - x^{(n)}(s)] +$$

$$+ \Omega_s^t(A_1^{(n-1)}) [A_2(\psi(s), \theta^{(n)}(s), x^{(n+1)}(s), \mu) - A_2(\psi(s), \theta^{(n-1)}(s),$$

$$x^{(n)}(s), \mu)] x^{(n)}(s)\} ds. \qquad (4.47)$$

Обозначив $\psi_n = \Omega_s^t(A_1^{(n-1)})\theta_0$, легко убедиться, что разность $\psi_{n+1} - \psi_n$ будет решением дифференциального уравнения

$$\frac{d(\psi_{n+1} - \psi_n)}{dt} = A_1^{(n)}(\psi_{n+1} - \psi_n) + (A_1^{(n)} - A_1^{(n-1)})\psi_n,$$

которое можно представить в виде

$$\psi_{n+1} - \psi_n = \int_s^t \Omega_\tau^t(A_1^{(n)})(A_1^{(n)} - A_1^{(n-1)})\Omega_s^\tau(A_1^{(n-1)})\theta_0 d\tau, \qquad (4.48)$$

если учесть, что $\psi_{n+1} - \psi_n = 0$ при $t = s$. Из этого соотношения с помощью неравенств (4.10) и (4.40) получаем оценку

$$\| \psi_{n+1} - \psi_n \| \leqslant \int_t^s e^{(\alpha-\varepsilon)(t-\tau)} \mu K_1 \| \theta^{(n)} - \theta^{(n-1)} \| e^{(\alpha-\varepsilon)(\tau-s)} \| \theta_0 \| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \mu K_1 e^{(\alpha-\varepsilon)(t-s)} (s-t) \| \theta^{(n)} - \theta^{(n-1)} \|_0 \| \theta_0 \| \qquad (4.49)$$

при $s \geqslant t \geqslant 0$. Из соотношения (4.47) с учетом (4.49) следует

$$\| \eta_{n+1}(t) \| \leqslant \mu \int\limits_t^{\infty} \mu K_1 e^{(\alpha-\varepsilon)(t-s)}(s-t) \| \eta_n \|_0 M_1 c_0 e^{-(\gamma-\varepsilon)s} \delta ds +$$

$$+ \mu \int\limits_t^{\infty} e^{(\alpha-\varepsilon)(t-s)} \mu K_1 (\| \eta_n \| + \| r_{n+1} \|) c_0 e^{-(\gamma-\varepsilon)s} \delta ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\mu^2 K_1 M_1 c_0 \gamma}{(\gamma-\varepsilon)^2} e^{-(\gamma-\varepsilon)t} \| \eta_n(t) \|_0 + \frac{\mu^2 K_1 c_0 \delta}{\gamma-\varepsilon} e^{-(\gamma-\varepsilon)t} \| \eta_n(t) \|_0 +$$

$$+ \mu M_1 \int\limits_t^{\infty} e^{(\alpha-\varepsilon)(t-s)} \| r_{n+1}(s) \| ds + \mu^2 K_1 c_0 \delta \int\limits_t^{\infty} e^{(\alpha-\varepsilon)(t-s)} e^{-(\gamma-\varepsilon)s} \| r_{n+1}(s) \| ds. \tag{4.50}$$

Положим

$$\mathcal{I}_1 = \int\limits_t^{\infty} e^{(\alpha-\varepsilon)(t-s)} \| r_{n+1}(s) \| ds,$$

$$\mathcal{I}_2 = \int\limits_t^{\infty} e^{(\alpha-\varepsilon)(t-s)} e^{(\gamma-\varepsilon)s} \| r_{n+1}(s) \| ds.$$

Для этих выражений, используя неравенства (4.46), находим

$$\mathcal{I}_1 \leqslant \int\limits_t^{\infty} e^{(\alpha-\varepsilon)(t-s)} e^{-(\gamma-\varepsilon)t} (As+B) \delta (\| r_n(s) \|_0 + \| \eta_n(s) \|_0) ds \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{A}{\gamma+\alpha-2\varepsilon} t + \frac{A}{(\gamma+\alpha-2\varepsilon)^2} + \frac{B}{\gamma+\alpha-2\varepsilon} \right] e^{-(\gamma-\varepsilon)t} \delta (\| r_n \|_0 + \| \eta_n \|_0); \tag{4.51}$$

$$\mathcal{I}_2 \leqslant \int\limits_t^{\infty} e^{(\alpha-\varepsilon)(t-s)} e^{-(\gamma-\varepsilon)s} (As+B) \delta (\| r_n(s) \|_0 + \| \eta_n(s) \|_0) ds \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{A}{\gamma+\alpha-2\varepsilon} t + \frac{A}{(\gamma+\alpha-2\varepsilon)^2} + \frac{B}{\gamma+\alpha-2\varepsilon} \right] e^{-(\gamma-\varepsilon)t} \delta (\| r_n \|_0 + \| \eta_n \|_0),$$

где

$$A = 2\mu c_2 c_0 (K_2 + e^{\gamma\Delta} K_3), \qquad B = \frac{2\mu K_3 c_2}{\gamma-\varepsilon} e^{(\gamma-\varepsilon)\Delta}.$$

С учетом (4.51) неравенство (4.50) можно записать в виде

$$\| \eta_{n+1}(t) \| \leqslant \frac{\mu^2 K c_0}{\gamma+\alpha-2\varepsilon} \left(\frac{M_1}{\gamma+\alpha-2\varepsilon} + 1 \right) \delta e^{-(\gamma-\varepsilon)t} \| \eta_n \|_0 +$$

$$+ (\mu M_1 + \mu^2 K_1 c_0 \delta) \left(\frac{A}{\gamma+\alpha-2\varepsilon} t + \frac{A}{(\gamma+\alpha-2\varepsilon)^2} + \frac{B}{\gamma+\alpha-2\varepsilon} \right) \times$$

$$\times e^{-(\gamma+\alpha-2\varepsilon)t} \delta (\| r_n \|_0 + \| \eta_n \|_0),$$

или в виде

$$\| \eta_{n+1}(t) \| \leqslant \mu H \delta e^{-(\gamma-\varepsilon)t} (t+1) (\| \xi_n \|_0 + \| \eta_n \|_0), \qquad (4.52)$$

где H — некоторая положительная постоянная, не зависящая от μ. С помощью неравенств (4.46) и (4.52) находим оценку

$$\| \eta_{n+1}(t) \|_0 + \| r_{n+1}(t) \|_0 \leqslant \mu N S \delta (\| \eta_n(t) \|_0 + \| r_n(t) \|_0), \qquad (4.53)$$

из которой следует равномерная сходимость последовательности функций $\{\theta^{(n)}(t)\}$, $\{x^{(n)}(t)\}$ для всех

$$t \geqslant 0, \quad \psi_0 \in \mathfrak{T}_m, \quad 0 < \mu \leqslant \mu_0, \qquad (4.54)$$

если выбрать μ_0 настолько малым, чтобы выполнялось неравенство

$$\mu_0 N S < 1/2, \qquad (4.55)$$

где

$$S = \sup_{t \geqslant 0} (t+1) e^{-(\gamma-\varepsilon)t}, \quad N = \text{const}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в соотношениях (4.37), (4.38), получим предельные функции $\theta(t)$, $x(t)$, которые являются решениями системы дифференциальных уравнений (4.6) и удовлетворяют неравенствам

$$\| \theta(t) \| \leqslant c_0 e^{-(\gamma-\varepsilon)t} \delta, \qquad \| x(t) \| \leqslant c_0 e^{-(\gamma-\varepsilon)t} \delta \quad (t \geqslant 0). \qquad (4.56)$$

Отсюда следует экспоненциальное убывание решений системы (4.6) при $t \to \infty$.

Возвращаясь к исходной с стеме уравнений (4.1) и обозначая решение $y_t = y_t(y_0(t), \varphi_0(t))$, $\varphi(t) = \varphi_t(y_0(t), \varphi_0(t))$ на начальном отрезке $t \in [-\Delta, 0]$ соответственно через $y_0(t)$ и $\varphi_0(t)$, можно сделать вывод, что для каждого фиксированного ψ_0 и достаточно малого μ существуют решения

$$\varphi_t = \psi(t) + \mu\theta(t),$$

$$y_t = u(\varphi_t) + \mu^2 x(t) = u(\psi(t)) + [u(\varphi_t) - u(\psi(t))] + \mu^2 x(t)$$

этой системы с начальными условиями $y_0(t)$, $\varphi_0(t)$ при $t \in [-\Delta, 0]$, удовлетворяющие неравенствам

$$\| y_t - u(\psi(t)) \| \leqslant K\mu \| \theta(t) \| + \mu^2 \| x(t) \| \leqslant \mu \bar{K} c_0 \delta e^{-(\gamma-\varepsilon)t},$$

$$\| \varphi_t - \psi(t) \| \leqslant \mu c_0 \delta e^{-(\gamma-\varepsilon)t},$$

если выполняются неравенства

$$\| \varphi_0(t) - \psi(t) \| \leqslant \mu \qquad \| y_0(t) - u(\varphi_0(t)) \| \leqslant \mu^2;$$

это и завершает доказательство теоремы.

Глава V

ПРИВОДИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Рассмотрим линейную систему разностных уравнений

$$x_{n+1} = Ax_n + P(\varphi_n)\,x_n, \quad \Delta\varphi_n = \omega, \quad n = \pm 1, 2, 3, \ldots, \tag{1.1}$$

где A — постоянная, $P(\varphi)$ — квазипериодическая $(s \times s)$-мерная матрица, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)$ — частотный базис матрицы $P(\varphi)$, $x = (x^1, x^2, \ldots, x^s)$, $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m)$ — векторы размерности соответственно s и m.

Поставим задачу: найти замену переменных

$$x_n = \Phi(\varphi_n)\,y_n \tag{1.2}$$

с невырожденной квазипериодической по φ матрицей $\Phi(\varphi)$, приводящую систему (1.1) к системе с постоянными коэффициентами. При определенных условиях такое приведение всегда возможно. Ниже указывается способ построения матрицы $\Phi(\varphi)$, а следовательно, и общего решения системы (1.1).

Прежде чем доказывать теорему о приводимости системы (1.1), докажем необходимые в дальнейшем вспомогательные утверждения.

Пусть задана матрица $P(\varphi)$, аналитическая в области $|\operatorname{Im}\varphi| \leqslant \rho_0$ по $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m)$, периодическая по φ с периодом 2π, ограниченная постоянной M:

$$|P(\varphi)| = \sum_{i,j} |P_{ij}(\varphi)| \leqslant M$$

и пусть рядом Фурье этой матрицы является

$$P(\varphi) = \sum P^{(k)} e^{i(k,\varphi)}, \tag{1.3}$$

где $P^{(k)}$ — постоянные матрицы, $k = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$ — целочисленный вектор. Тогда, как известно, коэффициенты ряда Фурье $P^{(k)}$ будут удовлетворять неравенству

$$|P^{(k)}| \leqslant Me^{-\rho_0|k|}. \tag{1.4}$$

Обозначим через $\overline{P}(\varphi)$ среднее значение матрицы $P(\varphi)$:

$$P^0 = \overline{P}(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} P(\varphi)\, d\varphi^1 \dots d\varphi^m.$$

Через S_N обозначим, как и раньше, оператор:

$$S_N P(\varphi) = \sum_{|k| \leqslant N} P^{(k)} e^{i(k,\varphi)}. \tag{1.5}$$

В дальнейшем необходимо будет следующее утверждение [8].

Лемма 5.1. *Если* $0 < \delta < 1$, $\nu > 1$, *то*

$$\sum_{|k| \neq 0} |k|^\nu e^{-2\delta|k|} = \left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu \frac{1}{\delta^{\nu+m}} (1 + e^m). \tag{1.6}$$

Рассмотрим теперь вопрос о периодических решениях уравнения

$$U(\varphi + \omega) A = AU(\varphi) + P(\varphi), \tag{1.7}$$

где A — постоянная $(s \times s)$-мерная матрица. Будем считать, что собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ матрицы A действительны, различны и отличны от нуля, поэтому предположим, не нарушая общности, что матрица A — диагональная. Считая, что матрица $P(\varphi)$ представима в виде (1.3), будем искать решение уравнений (1.7) $U(\varphi)$ в виде ряда

$$U(\varphi) = \sum_k U^{(k)} e^{i(k,\varphi)} \tag{1.8}$$

с неизвестными матрицами $U^{(k)}$. Подставляя (1.8) и (1.3) в уравнение (1.7), для определения коэффициентов $U^{(k)}$ получаем следующее матричное уравнение:

$$U^{(k)} e^{i(k,\omega)} A = AU^{(k)} + P^{(k)}. \tag{1.9}$$

Выясним условия разрешимости этого уравнения. Обозначим элементы матриц $U^{(k)}$, $P^{(k)}$ таким образом:

$$U^{(k)} = \{U^{(k)}_{\alpha\beta}\}, \qquad P^{(k)} = \{P^{(k)}_{\alpha\beta}\}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, s. \tag{1.10}$$

Тогда уравнение (1.9) можно представить в виде системы

$$U^{(k)}_{\alpha\beta} e^{i(k,\omega)} \lambda_\beta = \lambda_\alpha U^{(k)}_{\alpha\beta} + P^{(k)}_{\alpha\beta}, \tag{1.11}$$

решая которую находим

$$U^{(k)}_{\alpha\beta} = \frac{P^{(k)}_{\alpha\beta}}{\lambda_\beta e^{i(k,\omega)} - \lambda_\alpha}. \tag{1.12}$$

При $|k| = 0$ из (1.9) получаем равенство

$$U^{(0)}_{\alpha\beta} = \frac{P^{(0)}_{\alpha\beta}}{\lambda_\beta - \lambda_\alpha}, \tag{1.13}$$

из которого следует, что исходная система разрешима лишь тогда, когда

$$P_{\alpha\alpha}^{(0)} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s. \qquad (1.14)$$

При выполнении условий (1.14), т. е. при равенстве нулю средних значений диагональных элементов матрицы $P(\varphi)$, уравнения (1.12) всегда разрешимы для всех $k=(k_1, k_2, \dots, k_m)$, $|k| \neq 0$.

Определив $U^{(k)}$, найдем формальное решение уравнения (1.7). Оно будет действительным решением уравнения (1.7), если ряд (1.8) окажется сходящимся. Прн доказательстве сходимости этого ряда оценим норму матрицы $U^{(k)}$. С учетом условий (1.14), (1.15) из соотношений (1.12), (1.13) для элементов $U_{\alpha\beta}^{(k)}$ матрицы $U^{(k)}$ получим следующие оценки:

$$|U_{\alpha\beta}^{(0)}| \leqslant \frac{|P_{\alpha\beta}^{(0)}|}{\min\limits_{\alpha\neq\beta} |\lambda_\beta - \lambda_\alpha|}, \qquad |U_{\alpha\beta}^{(k)}| \leqslant \frac{|P_{\alpha\beta}^{(k)}|}{2\sin\frac{(k,\omega)}{2} \min\limits_{\alpha} |\lambda_\alpha|}. \qquad (1.15)$$

Предположим, что при некоторых положительных ε и d выполняется неравенство

$$\left|\sin\frac{(k,\omega)}{2}\right| \geqslant \varepsilon |k|^{-d}, \quad |k| \neq 0, \qquad (1.16)$$

для всех целочисленных векторов $k=(k_1, k_2, \dots, k_m)$. С учетом (1.16) неравенства (1.15) принимают вид

$$|U^{(0)}| \leqslant \frac{|P^{(0)}|}{\min\limits_{\alpha\neq\beta} |\lambda_\beta - \lambda_\alpha|}, \qquad |U^{(k)}| \leqslant \frac{|P^{(k)}|}{2\varepsilon \min\limits_{\alpha} |\lambda_\alpha|} |k|^d. \qquad (1.17)$$

Вопросы сходимости и дифференцируемости ряда (1.8) для аналитической матрицы $P(\varphi)$ устанавливает следующее утверждение [10].

Лемма 5.2. *Пусть матрица $P(\varphi)$ — периодическая по $\varphi=(\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m)$ с периодом 2π, аналитическая в области*

$$|\operatorname{Im}\varphi| \leqslant \rho_0, \qquad (1.18)$$

действительная при $\operatorname{Im}\varphi=0$, удовлетворяющая неравенству

$$|P(\varphi)| \leqslant M_0 \qquad (1.19)$$

и условию (1.14). Пусть, кроме того, собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ матрицы A действительны, различны и отличны от нуля, а вектор $\omega=(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$ удовлетворяет неравенству (1.16). Тогда уравнение (1.7) имеет периодическое с периодом 2π решение $U(\varphi)$, выражаемое аналитической функцией в области

$$|\operatorname{Im}\varphi| \leqslant \rho_0 - 2\delta, \quad 0 < 2\delta < \rho_0, \qquad (1.20)$$

действительной при $\operatorname{Im}\varphi=0$ *и удовлетворяющее неравенствам*

$$|U-U^{(0)}|\leqslant\frac{1}{2\varepsilon\min\limits_{\alpha}|\lambda_\alpha|}\left(\frac{d}{e}\right)^d(1+e^m)\frac{M_0}{\delta^{d+m}}\leqslant c_1(\varepsilon)\frac{M_0}{\delta^{d+m}},$$

$$\left|\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right|=\sum_{\alpha=1}^{m}\left|\frac{\partial U}{\partial\varphi_\alpha}\right|\leqslant c_1(\varepsilon)\frac{M_0}{\delta^{d+m+1}}.$$

Доказательство. Условия (1.14) и (1.16) обеспечивают существование формального решения уравнения (1.7)

$$U=U^{(0)}+\sum_{|k|\neq 0}U^{(k)}e^{i(k,\varphi)}\qquad(1.21)$$

и оценки (1.17) для его коэффициентов. Поэтому выполняется неравенство

$$|U-U^{(0)}|\leqslant\sum_{|k|\neq 0}|U^{(k)}|e^{|\operatorname{Im}\varphi||k|}\leqslant\frac{1}{2\varepsilon\min\limits_{\alpha}|\lambda_\alpha|}\sum_{|k|\neq 0}|P^{(k)}||k|^d e^{|\operatorname{Im}\varphi||k|}.\qquad(1.22)$$

Поскольку матрица $P(\varphi)$ является аналитической в области (1.18), то

$$|P^{(k)}|<M_0e^{-\rho_0|k|},\qquad(1.23)$$

и, следовательно

$$|U-U^{(0)}|\leqslant\frac{1}{2\varepsilon\min\limits_{\alpha}|\lambda_\alpha|}\sum_{|k|\neq 0}M_0e^{-\rho_0|k|}|k|^d e^{|\operatorname{Im}\varphi||k|}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{M_0}{2\varepsilon\min\limits_{\alpha}|\lambda_\alpha|}\sum_{k\neq 0}|k|^d e^{(|\operatorname{Im}\varphi|-\rho_0)|k|}\leqslant\frac{M_0}{2\varepsilon\min\limits_{\alpha}|\lambda_\alpha|}\sum_{|k|\neq 0}|k|^d e^{-2\delta|k|}.\qquad(1.24)$$

С учетом соотношения (1.6) неравенство (1.24) можно записать в виде

$$|U-U^{(0)}|\leqslant\frac{M_0}{2\varepsilon\min\limits_{\alpha}|\lambda_\alpha|}\left(\frac{d}{e}\right)^d(1+e^m)\,\delta^{-(d+m)}\leqslant c_1(\varepsilon)\frac{M_0}{\delta^{d+m}}.\qquad(1.25)$$

Дифференцируя ряд (1.21) и оценивая его коэффициенты, получаем

$$\left|\frac{\partial U(\varphi)}{\partial\varphi}\right|\leqslant\sum_{\alpha=1}^{m}\left|\frac{\partial U}{\partial\varphi_\alpha}\right|\leqslant\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{|k|\neq 0}|k_\alpha||U^{(k)}|e^{|\operatorname{Im}\varphi||k|}\leqslant$$
$$\leqslant m\sum_{|k|\neq 0}|k||U^{(k)}|e^{|\operatorname{Im}\varphi||k|}\leqslant\frac{mM_0}{2\varepsilon\min\limits_{\alpha}|\lambda_\alpha|}\sum_{|k|\neq 0}|k|^{d+1}e^{-2\delta|k|}\leqslant c_1(\varepsilon)\frac{M_0}{\delta^{d+m+1}}\qquad(1.26)$$

при $|\operatorname{Im}\varphi|\leqslant\rho_0-2\delta$. Из неравенств (1.25) и (1.26) следует, что для всех φ из области (1.20) матрица $U(\varphi)$ существует, является аналитической и периодической по φ с периодом 2π. Действительность этой матрицы при $\operatorname{Im}\varphi=0$ следует из комплексной сопряженности

коэффициентов $U^{(k)}$ и $U^{(-k)}$, поскольку для действительной при $\operatorname{Im}\varphi=0$ матрицы $P(\varphi)$ коэффициенты $P^{(k)}$ и $P^{(-k)}$ являются комплексно сопряженными.

§ 2. ТЕОРЕМА О ПРИВОДИМОСТИ

Основной результат, полученный при решении сформулированной выше задачи, устанавливает

Теорема 5.1 [58]. *Пусть система* (*1.1*) *удовлетворяет следующим условиям*:

1) матрица $P(\varphi)$ *является периодической по* $\varphi=(\varphi^1, \ldots, \varphi^m)$, *с периодом* 2π, *аналитической в области*

$$|\operatorname{Im}\varphi| = \sup_{\alpha}|\operatorname{Im}\varphi_\alpha| \leqslant \rho_0, \quad \rho_0 > 0, \tag{2.1}$$

и действительной при $\operatorname{Im}\varphi=0$;

2) при некоторых положительных ε *и* d *выполняется неравенство*

$$\left|\sin\frac{(k, \omega)}{2}\right| > \varepsilon|k|^{-d}, \quad |k| \neq 0, \tag{2.2}$$

для всех целочисленных векторов $k=(k_1, \ldots, k_m)$;

3) собственные числа $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ *матрицы* A *действительны, различны и отличны от нуля.*

Тогда можно указать такую достаточно малую положительную постоянную M_0, *что при*

$$|P(\varphi)| = \sum_{i,j=1}^{s}|P_{ij}(\varphi)| \leqslant M_0 \tag{2.3}$$

система уравнений (*1.1*) *невырожденной заменой переменных*

$$x_n = \Phi(\varphi_n)\, y_n \tag{2.4}$$

с периодической по φ *с периодом* 2π, *аналитической, аналитически обратимой в области*

$$|\operatorname{Im}\varphi| \leqslant \rho_0/2 \tag{2.5}$$

и действительной при $\operatorname{Im}\varphi=0$ *матрицей* $\Phi(\varphi)$ *приводится к виду*

$$y_{n+1} = A_0 y_n, \quad \Delta\varphi_n = \omega, \tag{2.6}$$

где A_0 — *постоянная матрица.*

Из сформулированной теоремы следует, что фундаментальная матрица системы (1.1) имеет вид

$$X_n = \Phi(\varphi_n)\, A_0^n, \tag{2.7}$$

где $\Phi(\varphi_n)$ — невырожденная квазипериодическая действительная матрица с частотным базисом матрицы $P(\varphi)$.

Доказательство теоремы 5.1 проведем путем построения приводящей матрицы $\Phi(\varphi)$. Представим матрицу $P(\varphi)$ в виде

суммы двух матриц: $P(\varphi)=D+Q$, где матрица D — диагональная: $D=\{d_1, \dots, d_n\}$ и имеет диагональные элементы, равные элементам матрицы P. В системе (1.1) сделаем замену переменных:

$$x_n = (E + U_1(\varphi_n))\, y_n^{(1)} \tag{2.8}$$

и выберем в качестве $U_1(\varphi)$ периодическое решение уравнения

$$U_1(\varphi+\omega)A = AU_1(\varphi) + P(\varphi) - \overline{D}, \tag{2.9}$$

где

$$\overline{D} = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_0^{2\pi}\dots\int_0^{2\pi} D(\varphi)\, d\varphi^1 \dots d\varphi^m.$$

Поскольку матрица A — диагональная и ее диагональные элементы $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ действительны, различны и отличны от нуля, то уравнение (2.9) всегда разрешимо, при этом функция $U_1(\varphi)$ является аналитической в области

$$|\operatorname{Im}\varphi| \leqslant \rho_0 - 2\delta_0 = \rho_1, \tag{2.10}$$

действительной при $\operatorname{Im}\varphi = 0$ и удовлетворяет неравенству

$$|U_1(\varphi)| \leqslant \left[\frac{1}{\min\limits_{\alpha\neq\beta}|\lambda_\beta-\lambda_\alpha|} + \frac{1}{2\varepsilon\min\limits_{\alpha}|\lambda_\alpha|}\left(\frac{d}{e}\right)^d (1+e)^m \frac{1}{\delta^{d+m}}\right] M_0. \tag{2.11}$$

Подставляя (2.8) в (1.1) и учитывая (2.9), получаем систему

$$y_{n+1}^{(1)} = (A+\overline{D})\, y_n^{(1)} + P_1(\varphi_n)\, y_n^{(1)}, \quad \Delta\varphi_n = \omega, \tag{2.12}$$

в которой

$$P_1(\varphi_n) = (E + U_1(\varphi_n+\omega))^{-1}\,[P(\varphi_n)U_1(\varphi_n) - U_1(\varphi_n+\omega)\overline{D}]. \tag{2.13}$$

Положим $r_0 = \min\limits_{\alpha\neq\beta}|\lambda_\beta - \lambda_\alpha|$ и выберем такое малое $M_0 = M_0(r_0, \delta_0)$, чтобы выполнялось неравенство

$$4s\left[\frac{1}{r_0} + \frac{1}{2\varepsilon\min\limits_{\alpha}|\lambda_\alpha|}\left(\frac{d}{e}\right)^d (1+e)^m \frac{1}{\delta^{d+m}}\right] M_0^{2-\gamma} < 1, \quad 1<\gamma<2. \tag{2.14}$$

Тогда для функции $U_1(\varphi)$ находим оценку

$$|U_1(\varphi)| < M_0^{\gamma-1}/4s. \tag{2.15}$$

Оценивая функцию $P_1(\varphi)$, получаем

$$|P_1(\varphi)| \leqslant \left(|E| + \sum_{\nu=1}^{\infty}|U_1(\varphi)|^\nu\right)(|P(\varphi)|\,|U_1(\varphi)| + |U_1(\varphi+\omega)|\,|\overline{D}|) \leqslant$$

$$\leqslant \left(s + \frac{M_0^{\gamma-1}}{4s - M_0^{\gamma-1}}\right)\frac{M_0^\gamma}{2s} \leqslant M_0^\gamma = M_1. \tag{2.16}$$

Если обозначить $A_1 = A + \bar{D}$ и $\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \ldots, \lambda_s^{(1)}$ — диагональные элементы матрицы A_1, то получим неравенства

$$\min_{\alpha\neq\beta} | \lambda_\beta^{(1)} - \lambda_\alpha^{(1)} | \geqslant \min_{\alpha\neq\beta} |\lambda_\beta - \lambda_\alpha | - \min_{\alpha\neq\beta} | d_\beta - d_\alpha | \geqslant r_0 - 2M_0 = r_1;$$
$$\min_\alpha | \lambda_\alpha | \geqslant \min_\alpha | \lambda_\alpha | - \max_\alpha | d_\alpha | \geqslant \sigma_0 - M_0 = \sigma_1. \tag{2.17}$$

При малых M_0, например при $M_0 < r_0/4$, $M_0 < \sigma_0/2$, т. е. при $M_0 < \max\{r_0/4, \sigma_0/2\}$, постоянные r_1, σ_1 будут положительными, а значит, $\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \ldots, \lambda_s^{(1)}$ — различными. Очевидно, что система

$$y_{n+1}^{(1)} = A_1 y_n^{(1)} + P_1(\varphi_n)\, y_n^{(1)}, \quad \Delta\varphi_n = \omega \tag{2.18}$$

будет обладать теми же свойствами, что и исходная система (1.1), и, следовательно, к ней можно применять те же преобразования, что и для системы (1.1). Покажем, что процесс преобразования системы (1.1) заменами вида (2.4) можно продолжать до бесконечности при соответствующем выборе ρ_0 и δ. Как следует из предыдущих рассуждений, функция $U_1(\varphi)$ будет аналитической в области

$$| \operatorname{Im} \varphi | \leqslant \rho_0 - 2\delta_0 = \rho_1,$$

функция $U_2(\varphi)$, получаемая после второй итерации, — аналитической в области

$$| \operatorname{Im} \varphi | \leqslant \rho_1 - 2\delta_1 = \rho_0 - 2\delta_0 - 2\delta_1 = \rho_2$$

и т. д. Поэтому необходимо ограничить ρ_i, $i = 1, 2, \ldots$, каким-нибудь числом, например $\rho_0/2$. Положив $\delta_0 = q$, $\delta_1 = q^2, \ldots, \delta_i = q^{i+1}$, подберем q таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$2(q + q^2 + \ldots + q^i + \ldots) = \rho_0/2. \tag{2.19}$$

Очевидно, что q должно определяться выражением

$$q = \rho_0/(4 + \rho_0). \tag{2.20}$$

Тогда заменами вида (2.4) мы получим разностные уравнения для $U_1(\varphi), U_2(\varphi), \ldots, U_p(\varphi)$, в которых постоянные M связаны соотношением $M_{p+1} = M_p^\gamma$, $1 < \gamma < 2$.

Предположим, что в системе (1.1) процесс замены вида (2.4) уже проведен p раз, в результате чего получена система разностных уравнений

$$y_{n+1}^{(p)} = A_p y_n^{(p)} + P_p(\varphi_n)\, y_n^{(p)}, \quad \Delta\varphi_n = \omega, \tag{2.21}$$

удовлетворяющая следующим условиям:

1) матрица $P_p(\varphi)$ — периодическая по φ с периодом 2π, аналитическая по φ в области

$$| \operatorname{Im} \varphi | \leqslant \rho_p, \tag{2.22}$$

действительна при действительных φ и ограничена:

$$|P_p(\varphi)| \leqslant M_p; \qquad (2.23)$$

2) диагональные элементы $\lambda_1^{(p)}, \lambda_2^{(p)}, \ldots, \lambda_s^{(p)}$ действительной матрицы A_p отличны от нуля и удовлетворяют неравенствам

$$\min_{\alpha \neq \beta} |\lambda_\beta^{(p)} - \lambda_\alpha^{(p)}| \geqslant r_p, \quad \min_\alpha |\lambda_\alpha^{(p)}| \geqslant \sigma_p. \qquad (2.24)$$

Покажем, что при выполнении этих условий всегда можно указать такую положительную постоянную M^0, не зависящую от p, что для всех $M_0 < M^0$ будет существовать замена переменных

$$y_n^{(p)} = (E + U_{p+1}(\varphi_n))\, y_n^{(p+1)}, \qquad (2.25)$$

приводящая систему разностных уравнений (2.21) к виду

$$y_n^{(p+1)} = A_{p+1} y_n^{(p+1)} + P_{p+1}(\varphi_n)\, y_n^{(p+1)}, \quad \Delta\varphi_n = \omega, \qquad (2.26)$$

причем:

а) матрицы $P_{p+1}(\varphi)$, $U_{p+1}(\varphi)$ — периодические по φ с периодом 2π, аналитические в области

$$|\operatorname{Im}\varphi| \leqslant \rho_{p+1}, \qquad (2.27)$$

действительны при действительных φ и удовлетворяют неравенствам

$$|P_{p+1}(\varphi)| \leqslant M_{p+1}, \quad |U_{p+1}(\varphi)| \leqslant M^{\gamma-1}/4s; \qquad (2.28)$$

б) диагональные элементы $\lambda_1^{(p+1)}, \lambda_2^{(p+1)}, \ldots, \lambda_s^{(p+1)}$ действительной диагональной матрицы A_{p+1} различны, отличны от нуля и удовлетворяют неравенствам

$$\min_{\alpha \neq \beta} |\lambda_\beta^{(p+1)} - \lambda_\alpha^{(p+1)}| \geqslant r_{p+1}, \quad \min_\alpha |\lambda_\alpha^{(p+1)}| \geqslant \sigma_{p+1}, \qquad (2.29)$$

где постоянные M_{p+1}, ρ_{p+1}, r_{p+1}, σ_{p+1} связаны с постоянными M_p, ρ_p, r_p, σ_p соотношениями

$$\begin{gathered} M_{p+1} = M_p^\gamma, \quad \rho_{p+1} = \rho_p - 2\delta_0^p, \quad r_{p+1} = r_p - M_p^{\gamma-1}, \\ \sigma_{p+1} = \sigma_p - M_p^{\gamma-1}, \quad 1 < \gamma < 2, \quad \delta_0 < \rho_0/(4+\rho_0). \end{gathered} \qquad (2.30)$$

Действительно, в результате замены (2.25) система (1.1) переходит в систему (2.26), где $U_{p+1}(\varphi)$ является решением системы

$$U_{p+1}(\varphi+\omega) A_{p+1} = A_{p+1} U_{p+1}(\varphi) + P_p(\varphi) - \overline{D}_p \qquad (2.31)$$

и в силу предположений 1, 2 удовлетворяет условиям леммы 5.2, а поэтому справедливо неравенство

$$|U_{p+1}(\varphi)| \leqslant \left[\frac{1}{r_p} + \frac{1}{2\varepsilon\sigma_p}\left(\frac{d}{e}\right)^d \frac{(1+e)^m}{\delta_0^{(d+m)p}}\right] M_p \qquad (2.32)$$

при $|\operatorname{Im}\varphi| \leqslant \rho_{p+1}$.

Выберем M_0 настолько малым, чтобы кроме условий (2.14) выполнялись неравенства

$$r_0 - \sum_{\nu=0}^{\infty} M_0^{(\gamma-1)\gamma^\nu} > 0; \qquad \sigma_0 - \sum_{\nu=0}^{\infty} M_0^{(\gamma-1)\gamma^\nu} > 0;$$

$$4s\left[\frac{1}{r_0 - \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} M_0^{(\gamma-1)\gamma^\nu}} + \frac{1}{2\varepsilon\left(\sigma_0 - \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} M_0^{(\gamma-1)\gamma^\nu}\right)}\left(\frac{d}{e}\right)^d \frac{(1+e)^m}{\delta_0^{(d+m)p}}\right] M_0^{2-\gamma} M_0^{(2-\gamma)\gamma^p} < 1 \tag{2.33}$$

для всех целых $p > 0$. При выполнении неравенств (2.33) матрица $U_{p+1}(\varphi)$ будет удовлетворять оценке (2.28). Поскольку

$$P_{p+1}(\varphi) = (E + U_{p+1}(\varphi + \omega))^{-1}(P_p(\varphi) U_{p+1}(\varphi) - U_{p+1}(\varphi + \omega)\overline{D}_p),$$

то

$$|P_{p+1}(\varphi)| \leqslant |(E + U_{p+1}(\varphi + \omega))^{-1}| \, (|P_p(\varphi)| \, |U_{p+1}(\varphi)| +$$
$$+ |U_{p+1}(\varphi + \omega)| \, |\overline{D}_p|) \leqslant \left(s + \frac{M_p^{\gamma-1}}{4s - M_p^{\gamma-1}}\right)\left(M_p \frac{M_p^{\gamma-1}}{4s} +\right.$$
$$\left. + \frac{M_p^{\gamma-1}}{4s}\right) \leqslant M_p^\gamma = M_{p+1},$$

а так как матрица A_{p+1} — диагональная, то выполняются неравенства

$$\min_{\alpha \neq \beta} |\lambda_\alpha^{(p+1)} - \lambda_\beta^{(p+1)}| \geqslant \min_{\alpha \neq \beta} |\lambda_\alpha^{(p)} - \lambda_\beta^{(p)}| - \max_{\alpha \neq \beta} |\overline{P}_{p\alpha\alpha} - \overline{P}_{p\beta\beta}| >$$
$$> r_p - 2M_p > r_p - M_p^{\gamma-1};$$

$$\min_{\alpha \neq \beta} |\lambda_\alpha^{(p+1)} + \overline{P}_{p\alpha\alpha}| > \min_\alpha |\lambda_\alpha^{(p+1)}| - \max_\alpha |\overline{P}_{p\alpha\alpha}| > \sigma_p - M_p > \sigma_p - M_p^{\gamma-1}.$$

Таким образом, еслн в качестве M^0 выбрать значение M_0, удовлетворяющее неравенствам (2.14), (2.33), то всегда можно удовлетворить неравенствам (2.27)—(2.29). Отсюда следует, что процесс преобразования системы (1.1) можно продолжить до бесконечности.

Обозначим

$$\Phi_k(\varphi) = (E + U_1(\varphi))(E + U_2(\varphi)) \ldots (E + U_p(\varphi)) = \prod_{\alpha=1}^{p} (E + U_\alpha(\varphi)) \tag{2.34}$$

и покажем, что последовательность (2.34) равномерно сходится к матрице $\Phi(\varphi)$, аналитической в области

$$|\operatorname{Im} \varphi| < \rho_0/2. \tag{2.35}$$

Аналитичность матрицы $\Phi(\varphi)$ в области (2.35) следует из выбора $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p \ldots$,

В силу неравенств (2.25) имеет место оценка

$$|\Phi_{p+1}(\varphi)-\Phi_p(\varphi)|\leqslant\left|\prod_{\alpha=1}^{p}\left(E+\frac{M_{\alpha-1}^{\gamma-1}}{4s}\right)\right|\frac{M_p^{\gamma-1}}{4s}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{s}{4}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left(1+\frac{M_{\alpha-1}^{\gamma-1}}{4}\right)M_p^{\gamma-1}\leqslant cM_p^{\gamma-1},$$

откуда

$$|\Phi_{p+s}(\varphi)-\Phi_p(\varphi)|\leqslant c\sum_{\alpha=p}^{p+s-1}M_\alpha^{\gamma-1}<c\sum_{\alpha=p}^{\infty}M_\alpha^{\gamma-1}, \tag{2.36}$$

и, следовательно, последовательность (2.34) равномерно сходится. Обозначая предельную матрицу последовательности (2.34) через $\Phi(\varphi)$, убеждаемся, что она является аналитической по φ с периодом 2π, действительной при $\operatorname{Im}\varphi=0$ и аналитической при $|\operatorname{Im}\varphi|<\rho_0/2$. Поэтому, переходя в выражении

$$x_n=(E+U_1(\varphi))(E+U_2(\varphi))\dots(E+U_p(\varphi))\,y^{(p)} \tag{2.37}$$

к пределу при $p\to\infty$, получаем, что заменой переменных

$$x_n=\Phi(\varphi)\,y_n$$

система (1.1) переводится в систему

$$y_{n+1}=A_0y_n,\quad \Delta\varphi_n=\omega, \tag{2.38}$$

где

$$A_0=\lim_{p\to\infty}(A+\bar{D}_1+\bar{D}_2+\dots+\bar{D}_p).$$

Докажем теперь, что матрица $\Phi(\varphi)$ — невырожденная. Оценивая разность $\Phi_p(\varphi)-E$, находим

$$|\Phi_p(\varphi)-E|=\left|\prod_{\alpha=1}^{p}(E+U_\alpha(\varphi))-E\right|\leqslant\left|\left(\frac{M_0^{\gamma-1}}{4s}+\dots+\frac{M_{e-1}^{\gamma-1}}{4s}\right)I+\right.$$

$$+\left(\frac{M_0^{\gamma-1}}{4s}\,\frac{M_1^{\gamma-1}}{4s}+\dots+\frac{M_{p-2}^{\gamma-1}}{4s}\,\frac{M_{p-1}^{\gamma-1}}{4s}\cdot s\right)I+ \tag{2.39}$$

$$\left.+\dots+\frac{M_0^{\gamma-1}}{4s}\,\frac{M_1^{\gamma-1}}{4s}\dots\frac{M_{p-1}^{\gamma-1}}{4s}\,s^{p-1}I\right|\leqslant\left(\prod_{\alpha=1}^{p}\left(1+\frac{M_{\alpha-1}}{4}\right)-1\right)|I|,$$

где I — матрица с единичными элементами. Выбирая достаточно малое M_0, из (2.39) получаем неравенство

$$|\Phi_p(\varphi)-E|\leqslant c<1,$$

откуда

$$|\Phi(\varphi)-E|\leqslant c<1,$$

и, следовательно, ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \Phi(E - \Phi(\varphi))^i$ сходится и определяет матрицу $\Phi^{-1}(\varphi)$, обратную к $\Phi(\varphi)$.

Отметим наконец, что процесс построения приводящей матрицы $\Phi(\varphi)$ можно использовать для построения фундаментальной матрнцы решений системы (1.1).

§ 3. ПРИВОДИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ГЛАДКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Рассмотрим случай, когда матрица $P(\varphi)$ имеет конечное число производных. При этом, следуя работе [82], будем применять так называемый сглаживающий оператор (см. § 1 гл. VI). В качестве такового выберем оператор S_N. Он определяется для функции $f(\varphi)$, периодической с периодом 2π по каждому из аргументов $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m$, а следовательно, разлагающейся в ряд Фурье

$$f(\varphi) = \sum_k f^{(k)} e^{i(k, \varphi)}$$

(k — целочисленный вектор, (k, φ) — скалярное произведение), как оператор, укорачивающий ряд Фурье:

$$S_N f(\varphi) = \sum_{|k| \leqslant N} f^{(k)} e^{i(n, \varphi)}, \quad |k| = \sum_{\nu=1}^{m} |k_\nu|.$$

Для этого оператора выполняется

Лемма 5.3. [82]. *При $\lambda \geqslant 0$ имеет место неравенство*

$$|S_N f(\varphi)|_\lambda \leqslant C N^{\lambda+\delta} |f(\varphi)|_0,$$

а при $0 \leqslant \lambda \leqslant l - m - 1$ и $f(\varphi) \in C^l(E_m)$ — неравенство

$$|f(\varphi) - S_N f(\varphi)|_\lambda \leqslant C N^{-l+\lambda+\delta} |f(\varphi)|_l,$$

где $m \leqslant \delta \leqslant m + 1$.

Рассмотрим систему разностных уравнений

$$x_{n+1} = A x_n + P(\varphi_n) x_n, \quad \Delta\varphi_n = \omega, \tag{3.1}$$

для которых матрица $P(\varphi)$ является l раз непрерывно дифференцируемой и периодической по φ с периодом 2π. Будем считать, что A — действительная диагональная матрица:

$$A = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}.$$

Теорема 5.2 [60]. *Пусть правая часть системы (3.1) удовлетворяет следующим условиям:*

1) матрица $P(\varphi)$ является периодической по $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m)$ с периодом 2π н l раз непрерывно дифференцируемой;

2) при некоторых положительных ε и d *выполняется неравенство*

$$\left|\sin\frac{(k,\omega)}{2}\right| \geqslant \varepsilon |k|^{-d}, \quad |k| \neq 0, \tag{3.2}$$

для всех целочисленных векторов $k=(k_1, \dots, k_m)$;

3) собственные числа $\lambda=(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ *матрицы* A *действительны, различны и отличны от нуля.*

Тогда можно указать такую достаточно малую постоянную M *и такое целое число* $l=l(k_0)$, *что при*

$$|P(\varphi)| \leqslant M_0 < M^0, \quad |P(\varphi)|_l \leqslant C \tag{3.3}$$

система уравнений (3.1) с помощью невырожденной замены переменных

$$x_n = \Phi(\varphi_n)\, y_n \tag{3.4}$$

с периодической по φ *с периодом* 2π *и* k_0 *раз непрерывно дифференцируемой матрицей* $\Phi(\varphi)$ *приводится к виду*

$$y_{n+1} = A_0 y_n, \quad \Delta\varphi_n = \omega, \tag{3.5}$$

где A_0 *— постоянная матрица.*

Доказательство. Сделаем в уравнении (3.1) замену

$$x_n = (E + U_1(\varphi_n, N_0))\, y_n^{(1)}, \tag{3.6}$$

где $U_1(\varphi, N_0)$ — периодическое по $\varphi=(\varphi^1, \dots, \varphi^m)$ решение матричного уравнения

$$U_1(\varphi+\omega)A = AU_1(\varphi) + S_{N_0}(\overline{P}(\varphi)) - \overline{P}(\varphi), \tag{3.7}$$

в котором $S_{N_0}(P)$ — конечная сумма ряда Фурье функции $P(\varphi)$:

$$S_{N_0}(P) = \sum_{|k| \leqslant N_0} P^{(k)} e^{i(k,\varphi)};$$

$$\overline{P} = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} P(\varphi)\, d\varphi^1\, d\varphi^2 \dots d\varphi^m; \tag{3.8}$$

$$U_1(\varphi_n, N_0) = \sum_{|k \leqslant N_0} U_1^{(k)} e^{i(k,\varphi)}.$$

Учитывая результаты предыдущего параграфа, убеждаемся, что уравнение (3.7) имеет периодическое решение $U_1(\varphi_n, N_0)$, которое допускает оценку

$$|U_1(\varphi, N_0)|_\lambda = \max_{|\rho|=\rho_1+\dots+\rho_m=\lambda} |D_\varphi^{|\rho|} U_1(\varphi, N_0)| \leqslant$$

$$\leqslant CN_0^{\lambda+m+1} |U_1(\varphi, N_0)|_0 \leqslant C_1 N^{\lambda+m+1} \sum_{|k| \leqslant N_0} |U_1^{(k)}| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 N_0^{\lambda+m+1}\left[\frac{|P^{(0)}|}{\min\limits_{\alpha\neq\beta}|\lambda_\alpha-\lambda_\beta|}+\sum_{|k|\leqslant N_0}\frac{|P^{(k)}|\,|k|^d}{\varepsilon}\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_1 N^{\lambda+m+1}}{\max(r_0,\ \varepsilon)}\sum_{|k|\leqslant N_0}N_0^d\,|P|_0\leqslant\frac{2^m C_1 N_0^{\lambda+d+2m+1}}{\bar r}\,|P|_0, \tag{3.9}$$

где $\bar r=\max(r_0,\ \varepsilon)$. В результате замены (3.6) относительно $y_n^{(1)}$ получим систему уравнений

$$y_{n+1}^{(1)}=(A+\overline{D})\,y_n^{(1)}+P_1(\varphi)\,y_n^{(1)}, \tag{3.10}$$

где

$$P_1(\varphi)=P_1(\varphi,\ N_0)=$$

$$=E+U_1(\varphi+\omega,\ N_0)^{-1}\left(P(\varphi)\,U_1(\varphi,\ N_0)-U_1(\varphi+\omega)\,N_0\right)\overline{D}+R_{N_0};$$

$$R_{N_0}=P-S_{N_0}(P). \tag{3.11}$$

В силу того что для достаточно гладкой функции $P(\varphi)$ $R_{N_0}\to 0$ при $N_0\to\infty$, всегда можно подобрать N_0 таким образом, чтобы величина R_{N_0} была второго порядка малости по сравнению с M. Кроме того, постоянную M можно выбрать настолько малой, чтобы матрица $U_1(\varphi)$ была величиной первого порядка малости относительно M_0. Поэтому, оценивая порядок малости матрицы $P_1(\varphi)$, легко убедиться, что $P_1(\varphi)$ является величиной второго порядка малости по сравнению с M_0.

Введя обозначение $A_1=A+\overline{D}$, запишем систему (3.10) в виде

$$y_{n+1}^{(1)}=A_1 y_n^{(1)}+P_1(\varphi_n)\,y_n^{(1)}, \tag{3.12}$$

где правая часть удовлетворяет условиям 1—3. Тогда в системе (3.12) можно сделать замену переменных

$$y_n^{(1)}=(E+U_2(\varphi))\,y_n^{(2)}, \tag{3.13}$$

где $U_2(\varphi_n)$ — периодическое решение уравнения

$$U_2(\varphi+\omega)\,A_1=A_1U_2(\varphi)+S_{N_1}(P_1(\varphi))-\overline{P_1(\varphi)}. \tag{3.14}$$

Подставляя (3.13) в систему (3.12) и учитывая (3.14), получаем относительно $y_n^{(2)}$ систему уравнений

$$y_{n+1}^{(2)}=(A_1+\overline{P}_1(\varphi))\,y_n^{(2)}+(E+U_2(\varphi))^{-1}\,(P_1(\varphi)\,U_2(\varphi)-$$

$$-U_2(\varphi+\omega)\,\overline{P}_1(\varphi)+R_{N_1}). \tag{3.15}$$

Определим N_1 соотношением $N_1=N_0^\gamma$, $1<\gamma<2$. При таком выборе N_1 можно показать, что матрица

$$P_2(\varphi)=(E+U_2(\varphi))^{-1}(P_1(\varphi)U_2(\varphi)-U_2(\varphi+\omega)\overline{P}_1(\varphi)+R_{N_1})$$

является величиной второго порядка малости относительно $|P_1(\varphi)|_0$, а значит, четвертого порядка малости относительно M_0.

Продолжая процесс преобразования исходного уравнения, на p-м шаге находим замену

$$y_n^{(p-1)} = (E + U_p(\varphi))\, y_n^{(p)}, \tag{3.16}$$

приводящую систему уравнений (3.1) к следующей системе уравнений:

$$y_{n+1}^{(p)} = (A_{p-1} + \overline{P}_{p-1})\, y_n^{(p)} + P_p. \tag{3.17}$$

Матрица $U_p(\varphi)$ в соотношении (3.16) является периодическим решением уравнения

$$U_p(\varphi + \omega) A_{p-1} = A_{p-1} U_p(\varphi) + S_{N_{p-1}}(P_{p-1}) - \overline{P}_{p-1}, \tag{3.18}$$

где

$$A_{p-1} = A + \overline{P} + \sum_{j=1}^{p-2} \overline{P}_j;$$

$$P_p(\varphi) = (E + U_p(\varphi))^{-1} (P_{p-1}(\varphi) U_p(\varphi) - U_p(\varphi + \omega) \overline{P}_{p-1}(\varphi) + R_{N_{p-1}}^{(p-1)}); \tag{3.19}$$

$$N_p = N_{p-1}^{\gamma}, \quad p \geqslant 2.$$

Очевидно, что матрица $P_p(\varphi)$ имеет порядок малости 2^p относительно M_0, поскольку матрица $P_p(\varphi)$ имеет второй порядок малости по сравнению с P_{p-1}.

Оценим теперь матрицу $P_1(\varphi)$. С учетом неравенства (3.9) и свойств оператора S_N находим

$$|P_1(\varphi)| \leqslant |(E + U_1(\varphi + \omega, N_0))^{-1}| (2^{m+1} C_1 N_0^{d+2m+1} |P(\varphi)|_0^2 + \\ + C N^{-l+m+1} |P(\varphi)_l|. \tag{3.20}$$

Дифференцируя $P_1(\varphi)$, получаем оценку

$$|D_\varphi^l P_1(\varphi)| \leqslant c_2 [\, |(E + U_1(\varphi + \omega, N_0))^{-1}| (\, |P(\varphi) U_1(\varphi, N_0)|_l + \\ + |U_1(\varphi, N_0)|_l |\overline{D}| + |P(\varphi)|_l + |S_N P(\varphi)|_l) + \\ + \max_{\alpha=1,\ldots,l} \{ |(E + U_1(\varphi + \omega, N_0))^{-1}|_\alpha (\, |P(\varphi) U_1(\varphi, N_0)|_{l-\alpha} + \\ + |U_1(\varphi, N_0)|_{l-\alpha} |\overline{D}| + |P(\varphi)|_{l-\alpha} + |S_N P(\varphi)|_{l-\alpha} \}] \leqslant \\ \leqslant c_3 \Bigg[|(E + U_1(\varphi + \omega, N_0))^{-1} \Bigg(\max_{\alpha=1,\ldots,l} \Bigg\{ |P(\varphi)|_\alpha \frac{N_0^{l-\alpha+d+2m+1}}{\overline{r}} \Bigg\} |P(\varphi)|_0 + \\ + \frac{N_0^{l+d+2m-1}}{\overline{r}} |P(\varphi)|_0^2 + |P(\varphi)|_l + N^{l+m+1} |P(\varphi)|_0 \Bigg) + \\ + |(E + U_1(\varphi + \omega, N_0))^{-1}|_0^{l+1} \frac{N_0^{d+2m+1}}{\overline{r}} |P(\varphi)|_0 \times$$

$$\times \max_{\alpha=1,\dots,l}\left\{N_0^{\alpha}\max_{\beta}(|P(\varphi)|_{\beta}|U_1(\varphi, N_0)|_{l-\alpha-\beta})+\right.$$

$$\left.\left. + \frac{N_0^{l+d+2m+1}}{\bar{r}}|P(\varphi)|_0^2 + N^{l+m+1}|P(\varphi)|_0\right\}\right]. \qquad (3.21)$$

Согласно лемме 11 из работы [10] имеем

$$l > \frac{\gamma}{\gamma-1}(\beta+m+1);$$

$$1<\gamma<2; \qquad \beta > \frac{\gamma(k_0+d+2m+1)}{2-\gamma};$$

здесь k_0 — целое положительное число, и, следовательно, всегда можно указать такое положительное M^0, что при $M_0<M^0$ справедливы неравенства

$$|U_1(\varphi, N_1)|_{k_0} < M_0^{\gamma-1}/4s; \qquad |P_1(\varphi, N_1)| < M_0^{\gamma} \leqslant M_1;$$

$$|D_{\varphi}^l P_1(\varphi, N)| \leqslant N_1^l; \qquad N_1^{-\beta} = M_1 = N_0^{-\gamma\beta}$$

и обобщение неравенства Ландау — Адамара

$$|f|_{\lambda} \leqslant c|f|_0\left(\frac{|f|_r}{|f|_0}\right)^{\frac{\lambda}{r}}, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant r.$$

Поэтому можно легко получить оценку

$$|P|_{\alpha} \leqslant c|P|_0\left(\frac{|P|_l}{|P|_0}\right)^{\alpha/l} \leqslant cM_0\left(\frac{N_0^l}{M_0}\right)^{\alpha/l} = cM_0\frac{l-\alpha}{l}N_0^{\alpha},$$

откуда находим

$$\max_{\alpha}\left\{|P|_{\alpha}\frac{N_1^{l-\alpha+d+2m+1}}{\bar{r}}\right\} \leqslant \frac{c}{\bar{r}}N_1^{l+d+2m+1};$$

$$\max_{\alpha}\{N^{\alpha}\max_{\beta}(|P|_{\beta}|U_1|_{l-\alpha-\beta})\} \leqslant \max\left\{cM_0^{\frac{l-\beta}{l}}\frac{2^m c_1}{\bar{r}}N_1^{l+d+2m+1}M_0\right\} \leqslant \qquad (3.22)$$

$$\leqslant \frac{2^m cc_1}{\bar{r}}N_1^{l+d+2m+1}M_0.$$

Из соотношений (3.21) и (3.22) следует неравенство

$$|D_{\varphi}^l P_1(\varphi, N_1)| \leqslant c_4\left[(s+1)\left(\frac{N_1^{l+d+2m+2}M_0 + N_1^{l+d+2m+1}M_0^2}{\bar{r}} + \right.\right.$$

$$\left. + N_0^l + N_1^{l+m+1}M_0\right) + (s+1)^{l+1}\frac{N_1^{d+2m+1}M_0}{\bar{r}} \times$$

$$\left.\times\left(\frac{N_1^{l+d+2m+1} + N_1^{l+2m+d+1}M_0^2}{\bar{r}} + N_1^{l+m+1}M_0\right)\right],$$

из которого при малом M_0 получаем

$$|D_\varphi^l P_1(\varphi, N_1)| \leqslant N_1^l.$$

Продолжаем процесс преобразования сходной системы (3.1) с помощью замены вида (3.6). Полагая $M_j = M_{j-1}^\gamma = N_j^{-\beta}$, $N_j = N_{j-1}^\gamma$, при достаточно малом M_0 получаем неравенства

$$|U_p(\varphi, N_p)| \leqslant \frac{M_{p-1}^{\gamma-1}}{4s}; \qquad |P_p(\varphi)| \leqslant M_p;$$

$$|A_p - A| \leqslant \sum_{\alpha=0}^{p-1} M_\alpha < \frac{r}{2}, \tag{3.23}$$

из которых находим оценку

$$\left|\prod_{j=1}^{p+1}(E + U_j(\varphi, N_j)) - \prod_{j=1}^{p}(E + U_j(\varphi, N_j))\right| \leqslant \left|\prod_{j=1}^{p}(E + U_j(\varphi, N_j))\right| \times$$

$$\times |U_{p+1}(\varphi, N_{p+1})| \leqslant \left|\prod_{j=1}^{p}\left(E + \frac{M_{j-1}^{\gamma-1}}{4s} I\right)\right| \frac{M_p^{\gamma-1}}{4s} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{s}{4}\prod_{j=1}^{\infty}\left(1 + \frac{M_{j-1}^{\gamma-1}}{4}\right) M_p^{\gamma-1} \leqslant \frac{s}{2} M_p^{\gamma-1}.$$

Отсюда следует критерий равномерной сходимости последовательности $\prod_{j=1}^{p}(E + U_j(\varphi, N_j))$

$$\left|\prod_{j=1}^{p+k_0}(E + U_j(\varphi, N_j)) - \prod_{j=1}^{p}(E + U_j(\varphi, N_j))\right| \leqslant \frac{s}{2}\sum_{j=p}^{p+k-1} M_j^{\gamma-1} < sN_p^{\gamma-1}.$$

Если ввести обозначения

$$\Phi(\varphi) = \lim_{p\to\infty}\prod_{j=1}^{p}(E + U_j(\varphi, N_j)),$$

$$A_0 = A + \overline{D} + \sum_{j=1}^{\infty}\overline{D}_j,$$

то легко заметить, что матрица $\Phi(\varphi)$ будет периодической по φ с периодом 2π. Кроме того, из неравенства

$$\left|\prod_{j=1}^{p}(E + U_i(\varphi, N_j)) - E\right| \leqslant \left[\prod_{j=1}^{p}\left(1 + \frac{M_{j-1}^{\gamma-1}}{4}\right) - 1\right]|I| < 1$$

следует сходимость ряда $\sum_{j=0}^{\infty}(E-\Phi(\varphi))^{j}$, а значит, невырожденность матрицы $\Phi(\varphi)$.

Имеет место также неравенство

$$\left|D_{\varphi}^{k_0}\left[\prod_{j=1}^{p+1}(E+U_j(\varphi, N_j))-\prod_{j=1}^{p}(E+U_j(\varphi, N_j))\right]\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|D_{\varphi}^{k_0}\left[\prod_{j=1}^{p}(E+U_j(\varphi, N_j))\,U_{p+1}(\varphi, N_{p+1})\right]\right|\leqslant$$

$$\leqslant c\max_{\alpha=1,\dots,k_0}\left\{\prod_{j=1}^{p}|(E+U_j(\varphi, N_0))|_{\alpha}\,|U_{p+1}(\varphi, N_{p+1})|_{k_0-\alpha}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant c_5\,|U_{p+1}(\varphi, N_{p+1})|_{k_0}\leqslant c_5\,\frac{M_p^{\gamma-1}}{4s},$$

из которого следует дифференцируемость матрицы $\Phi(\varphi)$ k_0 раз.

Глава VI

ИНВАРИАНТНЫЕ ТОРОИДАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ НА ТОРОИДАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ И В ИХ ОКРЕСТНОСТЯХ

§ 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Рассмотрим каноническую форму действительной $(s \times s)$-мерной матрицы A. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ — собственные значения матрицы A, $\mathcal{J} = \{\mathcal{J}_{\rho_1}(\lambda_1), \mathcal{J}_{\rho_2}(\lambda_2), \ldots, \mathcal{J}_{\rho_p}(\lambda_p)\}$ — ее жорданова форма. Если λ_j — действительное собственное значение, то ему соответствует в $\mathcal{J}$ действительная $(\rho_j \times \rho_j)$-мерная жорданова клетка:

$$\mathcal{J}_{\rho_j}(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & \lambda_j & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & \lambda_j \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots \varepsilon_1 & \lambda_j \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

где ε_1 — любое отличное от нуля действительное число. Если $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ — комплексное, а $\bar{\lambda}_j = \alpha_j - i\beta_j$ — соответствующее ему комплексно-сопряженное собственное значение, то паре $\lambda_j, \bar{\lambda}_j$ в матрице $\mathcal{J}$ будет соответствовать пара $(\rho_j \times \rho_j)$-мерных жордановых клеток $\mathcal{J}_{\rho_j}(\lambda_j)$, $\mathcal{J}_{\rho_j}(\bar{\lambda}_j)$ вида (1.1). Этой паре можно поставить в соответствие $(2\rho_j \times 2\rho_j)$-мерную матрицу

$$\mathcal{J}_{2\rho_j}\{\lambda_j, \bar{\lambda}_j\} = \begin{pmatrix} S_j & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ \varepsilon_1 E_2 & S_j & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 E_2 & S_j \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots \varepsilon_1 E_2 & S_j \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

где E_2 — единичная матрица второго порядка,

$$S_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}.$$

Форму записи матрицы

$$B=\{D_1,\dots,D_p\}=\begin{pmatrix}D_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & D_2 & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \dots & D_p\end{pmatrix},$$

где

$$D_j=\begin{cases}\mathcal{I}_{\rho_j}(\lambda_j), & \text{если } \lambda_j \text{ — действительное число,}\\ \mathcal{I}_{2\rho_j}(\lambda_j,\ \bar\lambda_j), & \text{если } \lambda_j \text{ и } \bar\lambda_j \text{ — комплексно-сопряженные числа,}\end{cases}$$

называют канонической формой действительной матрицы A. Как известно, для любой действительной матрицы A существует действительная невырожденная матрица C, приводящая ее к канонической форме $B: CAC^{-1}=B$.

Лемма 6.1 [49]. *Пусть A — матрица в действительной канонической форме; $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ — ее собственные значения; $\varepsilon_1>0$; $\gamma_1=\max|\lambda_j|$. Тогда для всех целых $n\geqslant 0$*

$$\|A^nx\|\leqslant(\gamma_1+\varepsilon_1)^n\|x\|. \qquad (1.3)$$

Доказательство. Поскольку $A=\{D_1,\dots,D_p\}$, то $A^n=\{D_1^n,\dots,D_p^n\}$. При $D_j=\mathcal{I}_{\rho_j}(\lambda_j)$, где $\mathcal{I}_{\rho_j}(\lambda_j)$ определяется соотношением (1.1), из структуры жордановой клетки

$$\mathcal{I}_{\rho_j}(\lambda_j)=\lambda_jE_{\rho_j}+\varepsilon_1Z_{\rho_j},$$

где

$$Z_{\rho_j}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0\end{pmatrix},$$

получаем соотношение

$$D_j^n=\lambda_j^nE_{\rho_j}+n\lambda_j^{n-1}\varepsilon_1Z_{\rho_j}+\frac{n(n-1)}{2!}\lambda_j^{n-2}\varepsilon_1^2Z_{\rho_j}^2+$$

$$+\dots+\frac{n(n-1)\dots(n-\rho_j+2)}{(\rho_j-1)!}\lambda_j^{n-\rho_j+1}\varepsilon_1^{\rho_j-1}Z_{\rho_j}^{\rho_j-1}=$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_j^n & 0 & 0 & \dots 0\\ n\varepsilon_1\lambda_j^{n-1} & \lambda_j^n & 0 & \dots 0\\ \frac{n(n-1)}{2!}\varepsilon_1^2\lambda_j^{n-2} & n\varepsilon_1\lambda_j^{n-1} & \lambda_j^n & \dots 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \frac{n(n-1)\dots(n-\rho_j+2)}{\rho_j-1}\lambda_j^{n-\rho_j+1} & \varepsilon_1^{\rho_j-1} & n\varepsilon_1\lambda_j^{n-1} & \dots\lambda_j^n\end{pmatrix}. \qquad (1.4)$$

Поэтому, если $x_j = \{x^{j_1}, \ldots, x^{j_{\rho_j}}\}$ — ρ_j-мерный вектор, то вектор $D_j^n x_j$ будет иметь вид

$$D_j^n x^j = \left\{\lambda_j^n x^{j_1},\ (n\varepsilon_1\lambda_j^{n-1}x^{j_1} + \lambda_j^n x^{j_2}), \ldots\right.$$

$$\left.\ldots, \sum_{\nu=1}^{\rho_j} \frac{n(n-1)\ldots(n-(\rho_j-\nu)+1)}{(\rho_j-\nu)!}\lambda_j^{n-(\rho_j-\nu)}\varepsilon_1^{(\rho_j-\nu)}x^{j_\nu}\right\}. \qquad (1.5)$$

Из этого выражения следует соотношение

$$\| D_j^n x^j \|^2 = \lambda_j^{2n}x^{2j_1} + (\lambda_j^n x^{j_2} + n\varepsilon_1\lambda_j^{n-1}x^{j_1})^2 + \ldots$$

$$\ldots + \left(\lambda_j^n x^{\rho_j} + n\varepsilon_1\lambda_j^{n-1}x^{\rho_j-1} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-\rho_j-\nu)}{(\rho_j-1)!}\times\right.$$

$$\left.\times\lambda_j^{n-\rho_j+1}\varepsilon_1^{\rho_j-1}x^{j_1}\right)^2.$$

Кроме того, выполняются соотношения

$$(\lambda_j^n x^{j_2} + n\varepsilon_1\lambda_j^{n-1}x^{j_1})^2 = \lambda_j^{2n}x^{2j_2} + 2n\varepsilon_1\lambda_j^{2n-1}x^{j_1}x^{j_2} + n^2\varepsilon_1^2\lambda_j^{2n-2}x^{2j_1} \leqslant$$

$$\leqslant (\gamma_1^n + n\varepsilon_1\gamma_1^{n-1})[\gamma_1^n x^{2j_2} + n\varepsilon_1\gamma_1^{n-1}x^{2j_1}] \leqslant (\gamma_1+\varepsilon_1)^n[\gamma_1^n x^{2j_2} + n\varepsilon_1\gamma_1^{n-1}x^{2j_1}],$$

$$\left(\lambda_j^n x^{j_3} + n\varepsilon_1\lambda_j^{n-1}x^{j_2} + \frac{n(n-1)}{2!}\lambda_j^{n-2}x^{j_1}\right)^2 = \lambda_j^{2n}x^{2j_3} + n^2\varepsilon_1^2\lambda_j^{2n-2}x^{2j_2} +$$

$$+ \frac{n^2(n-1)^2}{4}\lambda_j^{2n-4}x^{2j_1} + 2n\varepsilon_1\lambda_j^{2n-1}x^{j_3}x^{j_2} + n(n-1)\lambda_j^{2n-2}x^{j_3}x^{j_2} +$$

$$+ n^2(n-1)\varepsilon_1\lambda_j^{2n-3}x^{j_1}x^{j_2} \leqslant \left(\gamma_1^n + n\varepsilon_1\gamma_1^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}\varepsilon_1^2\gamma_1^{n-2}\right)\times$$

$$\times\left(\gamma_1^n x^{2j_3} + n\varepsilon_1\gamma_1^{n-1}x^{2j_2} + \frac{n(n-1)}{2!}\varepsilon_1^2\gamma_1^{n-2}x^{2j_1}\right) \leqslant$$

$$\leqslant (\gamma_1+\varepsilon_1)^n\left(\gamma_1^n x^{2j_3} + n\varepsilon_1\gamma_1^{n-1}x^{2j_2} + \frac{n(n-1)}{2!}\varepsilon_1^2\gamma_1^{n-2}x^{2j_1}\right) \qquad (1.6)$$

и т. д., где $\gamma_1 = |\lambda_j|$. Учитывая неравенство (1.6), получаем оценку

$$\| D_j^n x^j \|^2 \leqslant \gamma_1^{2n}x^{2j_1} + (\gamma_1+\varepsilon_1)^n(\gamma_1^n x^{2j_2} + n\varepsilon_1\gamma_1^{n-1}x^{2j_1}) +$$

$$+ (\gamma_1+\varepsilon_1)^n\left(\gamma_1^n x^{2j_3} + n\varepsilon_1\gamma_1^{n-1}x^{2j_2} + \frac{n(n-1)}{2!}\varepsilon_1^2\gamma_1^{n-2}x^{2j_1}\right) +$$

$$+ (\gamma_1+\varepsilon_1)^n\left(\gamma_1^n x^{2j_4} + n\varepsilon_1\gamma_1^{n-1}x^{2j_3} + \frac{n(n-1)}{2!}\varepsilon_1^2\gamma_1^{n-2}x^{2j_2} +\right.$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\varepsilon_1^3\gamma_1^{n-3}x^{2j_1}\Big)+\ldots\leqslant\Big[\gamma_1^{2n}+(\gamma_1+\varepsilon_1)^n n\varepsilon_1\gamma_1^{n-1}+$$

$$+(\gamma_1+\varepsilon_1)^n\frac{n(n-1)}{2!}\varepsilon_1^2\gamma_1^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\varepsilon_1^3\gamma_1^{n-3}+\ldots\Big]x^{2j_1}+$$

$$+\Big[(\gamma_1+\varepsilon_1)^n\gamma_1^n+\gamma_1+\varepsilon_1)^n n\varepsilon_1\gamma_1^{n-1}+(\gamma_1+\varepsilon_1)^n\frac{n(n-1)}{2!}\varepsilon_1^2\gamma_1^{n-2}+\ldots\Big]\times$$

$$\times x^{2j_2}+\ldots\leqslant(\gamma_1+\varepsilon_1)^{2n}\|x^j\|^2. \qquad (1.7)$$

Отсюда находим

$$\|A^n x\|^2=\|\{D_1^n x^1, D_2^n x^2,\ldots,D_p^n x^p\}\|^2=\|D_1^n x^1\|^2+\|D_2^n x^2\|^2+\ldots$$

$$\ldots+\|D_p^n x^p\|^2\leqslant(\gamma_1+\varepsilon_1)^{2n}\|x^1\|^2+(\gamma_1+\varepsilon_1)^{2n}\|x^2\|^2+\ldots+(\gamma_1+$$

$$+\varepsilon_1)^{2n}\|x^p\|^2\leqslant(\gamma_1+\varepsilon_1)^{2n}(\|x^1\|^2+\|x^2\|^2+\ldots$$

$$\ldots+\|x^p\|^2=(\gamma_1+\varepsilon_1)^{2n}\|x\|^2.$$

Эта оценка и завершает доказательство леммы 6.1. Аналогично проводится доказательство для комплексно-сопряженных корней $\lambda_j=\alpha_j+i\beta_j$, $\bar\lambda_j=\alpha_j-i\beta_j$.

Рассмотрим функцию $f(x^1, x^2,\ldots,x^s)$, определенную для x, принадлежащих ограниченной замкнутой области D. Пусть $r_1, r_2,\ldots$ $\ldots, r_s$ — неотрицательные целые числа. Будем считать, что $f(x)$ принадлежит пространству $C_0^{r_1, r_2,\ldots, r_s}(D)$, если функция $f(x)$ имеет в области D все производные, порядок которых по каждому из аргументов x^i не превосходит r_i, и эти производные непрерывны в области D. Тогда

$$C^r(D)=\bigcap_{r_1+\ldots+r_s=r} C_0^{r_1,\ldots,r_s}(D)$$

является пространством r раз непрерывно дифференцируемых в области D функций.

Лемма 6.2 [115]. *Пусть* $F(\varphi^1,\ldots,\varphi^m, x^1,\ldots,x^s)$ — *периодическая по* $\varphi^1,\ldots,\varphi^m$ *с периодом* 2π *функция, принадлежащая пространству* $C_0^{l_1,\ldots,l_m, r_1,\ldots,r_s}(D)$, $F^{(k)}(x)=F^{(k_1,\ldots,k_m)}(x^1,\ldots x^s)$ — *ее коэффициенты Фурье,* $k_{\beta_1},\ldots,k_{\beta_j}$ — *отличные от нуля координаты вектора* $k=(k_1,\ldots,k_m)$. *Тогда* $F^{(k)}(x)\in C_0^{r_1,\ldots,r_s}(D)$ и

$$\left|\frac{\partial^\alpha F^{(k)}(x)}{(\partial x^1)^{\alpha_1}\ldots(\partial x^s)^{\alpha_s}}\right|\leqslant\min_{\substack{0\leqslant l_1^1\leqslant l_{\beta_1}\\ \ldots\ldots\\ 0\leqslant l_j^1\leqslant l_{\beta_j}}}\Bigg[|k_{\beta_1}|^{-l_1^1}\ldots|k_{\beta_j}|^{-l_j^1}\times$$

$$\times\max_{\varphi,x}\left|\frac{\partial^{l_1^1+\ldots+l_j^1+\alpha}}{(\partial\varphi^{\beta_1})^{l_2^1}\ldots(\partial\varphi^{\beta_j})^{l_j^1}(\partial x^1)^{\alpha}\ldots(\partial x^s)^{\alpha_s}}\right|\Bigg], \qquad (1.8)$$

где $\alpha=\alpha_1+\ldots+\alpha_s$, $0\leqslant\alpha_\nu\leqslant r_j$, $\nu=1,2,\ldots,s$.

В дальнейшем будут использоваться некоторые сглаживающие операторы и их основные свойства. Напомним, что оператор T_θ, зависящий от параметра θ, называется сглаживающим, если он, действуя на r раз непрерывно дифференцируемую функцию $f(x)$, переводит ее в бесконечно дифференцируемую функцию $T_\theta f(x)$, причем так, что при $\theta \to \theta_0$

$$|f(x) - T_\theta f(x)|_r \to 0. \tag{1.9}$$

Для функции $h(\varphi, x)$, определенной при $-a < x < a$, введем, следуя работе [115], оператор T_{NM}:

$$T_{NM} h(\varphi, x) = \iint\limits_{|x'|<a} \varkappa_{NM}(\varphi - \varphi^1, x - x^1)\, h(\varphi^1, x^1)\, d\varphi^1 dx^1, \tag{1.10}$$

где $\varkappa_{NM} = N\varkappa(N\varphi) M\varkappa(Mx)$, $\varkappa(z)$ — функция, все производные которой существуют и непрерывны и которая удовлетворяет соотношениям

$$\varkappa(z) = 0 \text{ при } |z| > 1,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} z^k \varkappa(z)\, dz = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0, \\ 0 & \text{при } 0 \leqslant k < l \end{cases}$$

(l — целое фиксированное число).

Рассмотрим также операторы T^0_{NM} и T^1_{NM}, которые приближают гладкие функции $h(\varphi, x)$ со свойствами соответственно $h(\varphi, 0) = 0$ и $h(\varphi, 0) = \frac{\partial h(\varphi, 0)}{\partial x} = 0$. Эти операторы задаются формулами

$$T^0_{NM} h(\varphi, x) = \int\limits_{|x^1_i|<a} \ldots \int \varkappa_N(\varphi - \varphi^1)\, [\varkappa_M(x - x^1) - \\ - \varkappa_M(-x^1)]\, h(\varphi^1, x^1)\, d\varphi^1 dx^1; \tag{1.11}$$

$$T^1_{NM} h(\varphi, x) = \int\limits_{|x^1_i|<a} \ldots \int \varkappa_N(\varphi - \varphi^1) \Bigl[\varkappa_M(x - x^1) - \varkappa_M(-x^1) + \\ + \frac{\partial \varkappa_M(-x^1)}{\partial x^1}\, x\Bigr] h(\varphi^1, x^1)\, d\varphi^1 dx^1, \quad -a < x_i < a, \quad i = 1, \ldots, s, \tag{1.12}$$

где $\varkappa_p(z) = p\varkappa(pz_1) \ldots p\varkappa(pz_s)$.

Относительно рассматриваемых операторов справедливы следующие утверждения [10].

Лемма 6.3. *Для любых целочисленных неотрицательных* $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_m)$, $r = (r_1, \ldots, r_s)$ *и всех* $x \in D_1$, *где область* D_1 *задается неравенствами*

$$-a + M^{-1} \leqslant x^i \leqslant a - M^{-1}, \quad M^{-1} < a, \quad i = 1, \ldots, s,$$

выполняются неравенства

$$\left| \frac{\partial^{|\rho| + |r|}}{(\partial\varphi^1)^{\rho_1} \ldots (\partial\varphi^m)^{\rho_m} (\partial x^1)^{r_1} \ldots (\partial x^s)^{r_s}} \mathcal{T}_{NM} f \right| \leqslant C N^{|\rho|} M^{|r| + \delta} |f(\varphi, x)|_0, \tag{1.13}$$

причем постоянная C не зависит от N, M, f, а

$$\delta = \begin{cases} 0 \text{ при } \mathcal{T}_{NM} = T^0_{NM}, \\ 1 \text{ при } \mathcal{T}_{NM} = T^1_{NM}. \end{cases}$$

Лемма 6.4. *Если $f(\varphi, x) \in C^l(D)$, то*

$$|f(\varphi, x) - \mathcal{T}_{NM} f(\varphi, x)| \leqslant c \sup_{|p|+|r|=l} N^{-|p|} M^{-|r|+\delta} \left| \frac{\partial^{|p|+|r|} f(\varphi, x)}{(\partial\varphi^1)^{p_1} \ldots (\partial x^s)^{r_s}} \right|,$$

где $\mathcal{T}_{NM} = \{T^0_{NM}, T^1_{NM}\}$.

§ 2. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим вопрос о периодических решениях уравнений

$$u(\varphi + \omega, Ax) = Au(\varphi, x) + F(\varphi, x); \tag{2.1}$$

$$w(\varphi + \omega, Ax) = w(\varphi, x) + f(\varphi, x), \tag{2.2}$$

где $F(\varphi, x) = (F^1, \ldots, F^s)$, $f(\varphi, x) = (f^1, \ldots, f^m)$ — периодические по $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m)$ с периодом 2π вектор-функции, определенные для $\|x\| \leqslant \eta$; A — $(s \times s)$-мерная матрица в действительной канонической форме; $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ — ее собственные значения; $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$.

Предположим, что функции $F(\varphi, x)$ и $f(\varphi, x)$ принадлежат пространству

$$C_0^{l,\tau}(\|x\| \leqslant \eta) = C_0^{l,\ldots,l,\tau,\ldots,\tau}(\|x\| \leqslant \eta), \quad l \geqslant m+2, \ \tau \geqslant 2,$$

и удовлетворяют условию

$$F(\varphi, 0) = \left.\frac{\partial F(\varphi, x)}{\partial x}\right|_{x=0} = f(\varphi, 0) = 0. \tag{2.3}$$

Выясним, какие ограничения требуется наложить на собственные значения матрицы A и ω, чтобы системы уравнений (2.1) и (2.2) имели периодические по φ с периодом 2π решения $u(\varphi, x) = (u^1, \ldots, u^s)$, $w(\varphi, x) = (w^1, \ldots, w^m)$, удовлетворяющие условию

$$u(\varphi, 0) = \left.\frac{\partial u(\varphi, x)}{\partial x}\right|_{x=0} = w(\varphi, 0) = 0. \tag{2.4}$$

Условия существования таких решений устанавливает [50]

Лемма 6.5. *Пусть функции $F(\varphi, x)$, $f(\varphi, x)$ являются периодическими по φ с периодом 2π, принадлежат пространству $C^{l,\tau}$ $(\|x\| \leqslant \eta)$, где $\tau \geqslant 2$, $l = m+1+\sigma$, и удовлетворяют соотношениям (2.3), а собственные числа матрицы A удовлетворяют неравенствам*

$$\begin{gathered} 0 < |\lambda_j| < 1, \\ |\lambda_\alpha| |\lambda_\beta| |\lambda_j|^{-1} \leqslant \gamma_1 < 1 \end{gathered} \tag{2.5}$$

для любых α, β, $j=1,\dots,s$ *и некоторого постоянного* $\gamma_1>0$. *Тогда система уравнений*

$$u(\varphi+\omega, Ax) = A^{\delta}u^{\delta}(\varphi, x)\,w^{1-\delta}(\varphi, x) + \delta F(\varphi, x) + \\ + (1-\delta) f(\varphi, x), \quad \delta = 0, 1, \tag{2.6}$$

имеет периодическое по φ *с периодом* 2π *решение*

$$u^{(\delta)}(\varphi, x) = L^{(\delta)}\{\delta F(\varphi, x) + (1-\delta) f(\varphi, x)\} = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} u_k^{(\delta)}(x)\, e^{i(k,\varphi)}, \tag{2.7}$$

принадлежащее пространству $C_0^{\sigma,\tau}(\|x\|\leqslant\eta)$, *удовлетворяющее условиям* (*2.4*) *и неравенствам*

$$|u^{(\delta)}(\varphi, x)| \leqslant a_0[\max_{\substack{l,|r_1|=1+\delta,\\ \|x\|\leqslant\eta}} |D_{\varphi}^{l} D_x^{r_1} F^{(\delta)}(\varphi, x)| + \max_{\substack{|r_1|=1+\delta,\\ \|x\|\leqslant\eta}} |D_x^{r_1} F^{(\delta)}(\varphi, x)|], \tag{2.8}$$

$$|D_{\varphi}^{\rho} D_x^{r} u^{(\delta)}(\varphi, x)| \leqslant a_1[\max_{\substack{l,|r_1|=1+\delta,\\ \|x\|\leqslant\eta}} |D_{\varphi}^{l} D_x^{r_1} F^{(\delta)}(\varphi, x)| + \max_{\substack{|r_1|=1+\delta,\\ \|x\|\leqslant\eta}} |D_x^{r_1} F^{(\delta)}(\varphi, x)|]$$

при $|r|=1$, $|\rho|\leqslant\sigma_j$ *и*

$$|D_{\varphi}^{\rho} D_x^{r} u^{(\delta)}(\varphi, x)| \leqslant a_2[\max_{\substack{l,|r_1|=|r|,\\ \|x\|\leqslant\eta}} |D_{\varphi}^{l} F^{(\delta)}(\varphi, x)| + \max_{\substack{|r_1|=|r|,\\ \|x\|\leqslant\eta}} |D_x^{r_1} F^{(\delta)}(\varphi, x)|] \tag{2.9}$$

при $2\leqslant|r|\leqslant\tau$, $|\rho|\leqslant\sigma$, *где* a_0, a_1, a_2 — *положительные постоянные, не зависящие от* $F^{(\delta)}(\varphi, x)$.

Вполне очевидно, что при $\delta=0$ система уравнений (2.6) совпадает с системой (2.1), при $\delta=1$ — с системой (2.2).

Доказательство. Приведем доказательство леммы для случая $\delta=1$, т. е. для системы (2.1). Поскольку матрица A имеет действительную каноническую форму, то одним из ее параметров является ε_1, которое может быть любым отличным от нуля числом. Предположим, что ε_1 — положительное фиксированное число. Тогда согласно лемме 6.1 для функции $A^n x$ справедлива оценка

$$\|A^n x\| \leqslant (\varepsilon_1 + \max_j |\lambda_j|)^n \|x\|,$$

из которой следует, что

$$\|A^n x\| \leqslant (\varepsilon_1 + \gamma_1)^n \|x\| \leqslant \|x\| \tag{2.10}$$

для всех $n\geqslant0$, если только $\varepsilon_1+\gamma_1<1$.

Учитывая соотношение (2.10), в уравнении (2.1) заменим x на $A^n x$, φ — на $\varphi_n=n\omega+\varphi$. Тогда получим уравнение

$$u((n+1)\omega+\varphi, A^{n+1}x) = Au(n\omega+\varphi, A^n x) + F(n\omega+\varphi, A^n x), \tag{2.11}$$

решение которого в точке $n=0$ удовлетворяет исходному уравнению (2.1). Решение уравнения (2.11) можно представить и в виде

$$u(\varphi_n, A^n x) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} A^{n-\nu} F(\varphi_{n+\nu-1}, A^{n+\nu-1}x), \quad n \geqslant 0. \tag{2.12}$$

Полагая в (2.12) $n=0$, получаем

$$u(\varphi, x) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} A^{-\nu} F(\varphi_{\nu-1}, A^{\nu-1}x). \tag{2.13}$$

Покажем теперь, что функция $u(\varphi, x)$, определенная согласно выражению (2.13), существует, принадлежит пространству $C_0^{l,\tau}$ ($\|x\| \leqslant \eta$), удовлетворяет условиям (2.4) и неравенствам (2.8), (2.9). Поскольку $F(\varphi, x) \in C_0^{l,2}$ ($\|x\| \leqslant \eta$), $F(\varphi, 0) = \left.\frac{\partial F(\varphi, x)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$, то, разлагая эту функцию в ряд Тейлора в точке $x=0$ с остаточным членом, определяемым производными второго порядка, можем записать

$$F(\varphi_{\nu-1}, A^{\nu-1}x) = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 F(\varphi_{\nu-1}, A^{\nu-1}x)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \{A^{\nu-1}x\}_\alpha \{A^{\nu-1}x\}_\beta, \tag{2.14}$$

где $\{A^{\nu-1}x\}_\alpha$ — α-я координата вектора $A^{\nu-1}x$. Подставляя выражение (2.14) в соотношение (2.13), находим

$$u_j(\varphi, x) = -\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu,\alpha,\beta} \{A^{-\nu}\}_{j\mu} \frac{\partial^2 F(\varphi_\nu, A^{\nu-1}x)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \{A^{\nu-1}x\}_\alpha \{A^{\nu-1}x\}_\beta,$$

$$j = 1, \dots, s. \tag{2.15}$$

Так как для $j\mu$-го элемента матрицы A^ν справедлива оценка

$$|\{A^\nu\}_{j\mu}| \leqslant P_{j\mu}(\nu) |\lambda_j|^\nu,$$

где $P_{j\mu}(\nu)$ — полином от ν степени не выше $s-1$, то из выражения (2.15) получаем неравенство

$$|u_j(\varphi, x)| \leqslant \frac{1}{2} \max_{\substack{\mu,\alpha,\beta \\ \|x\| \leqslant \eta}} \left| \frac{\partial^2 F^j(\varphi, x)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right| \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu,\alpha,\beta} |\{A^{-\nu}\}_{j\mu} \{A^{\nu-1}x\}_\alpha \{A^{\nu-1}x\}_\beta| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \max_{\substack{\alpha,\beta \\ \|x\| \leqslant \eta}} \left| \frac{\partial^2 F(\varphi, x)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right| \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\alpha,\beta} \left[\sum_{\mu=1}^{s} P_{j\mu}(\nu) \sum_{\mu=1}^{s} P_{\alpha\mu}(\nu) \sum_{\mu=1}^{s} P_{\beta\mu}(\nu) \right] \times$$

$$\times |\lambda_j|^{-\nu} |\lambda_\alpha|^{\nu-1} |\lambda_\beta|^{\nu-1} \eta^2 \leqslant a_0 \max_{\substack{|r|=2 \\ \|x\| \leqslant \eta}} |D_x^r F(\varphi, x)|. \tag{2.16}$$

Это неравенство означает, что функция $u(\varphi, x)$, определяемая соотношением (2.13), существует, непрерывна по φ, x и удовлет-

воряет соотношению (2.4) при $|\rho|+|r|=0$. Кроме того, из выражения (2.13) следует, что функция $u(\varphi, x)$ является периодической по φ с периодом 2π и удовлетворяет условию $u(\varphi, 0)=0$.

Легко доказать, что функция $u(\varphi, x)$ принадлежит пространству $C_0^{l,1}(\|x\|\leqslant\eta)$ и для ее производных справедливы неравенства (2.8), (2.9). Из выражения

$$\frac{\partial u(\varphi, x)}{\partial x} = -\sum_{\nu=1}^{\infty} A^{-\nu} \frac{\partial F(\varphi_{\nu-1}, A^{\nu-1}x)}{\partial y} A^{\nu-1}$$

следует равенство $\left.\frac{\partial u(\varphi, x)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$, а из существования суммы $\sum_{|\nu|=1}^{\infty} A^{-\nu} D_\varphi^\rho D_x^r \{F(\varphi_\nu, A^{\nu-1}x)\}$ — неравенство $|D_\varphi^\rho D_x^r u(\varphi, x)| \leqslant a_0 \times$ $\times \max\limits_{\substack{|r_1|=r \\ \|x\|\leqslant\eta}} |D_\varphi^\rho D_x^{r_1} F(\varphi, x)|$.

Очевидно, что при $|\rho|\leqslant l$ и $2\leqslant|r|\leqslant\tau$ функция $u(\varphi, x)$ принадлежит пространству $C_0^{l\tau}$ $(\|x\|\leqslant\eta)$ и для нее справедливо неравенство (2.9). Покажем теперь, что при выполнении условий (2.5) система (2.1) имеет единственное в пространстве $C_0^{l,2}$ периодическое решение, удовлетворяющее условию (2.4). Предположим противное, т. е. что система уравнений (2.1) в пространстве $C_0^{l,2}$ $(\|x\|\leqslant\eta)$ имеет два решения с указанными свойствами. Тогда разность этих решений будет решением однородной системы (2.1), удовлетворяющим условию (2.4). Но для всякого решения однородной системы уравнений (2.1) справедливо соотношение

$$u(\varphi_n, A^n x) = A^n u(\varphi, x), \quad n \geqslant 0. \tag{2.17}$$

Дифференцируя выражение (2.16), находим

$$A^{-n} \frac{\partial u(\varphi_n, A^n x)}{\partial y} A^n = \frac{\partial u(\varphi, x)}{\partial x}, \quad n \geqslant 0,$$

откуда, применяя формулу Тейлора, имеем

$$A^{-n} \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial u^1(\varphi_n A^n \tilde{x})}{\partial y_\alpha} \{A^n x\}_\alpha A^n = \frac{\partial u(\varphi, x)}{\partial x}.$$

Переходя в последнем выражении к пределу при $n\to\infty$, получаем

$$\frac{\partial u(\varphi, x)}{\partial x} = 0,$$

т. е. $u(\varphi, x)=u(\varphi, 0)=0$, что противоречит предположению о существовании двух решений.

Рассмотрим теперь вопрос о периодических решениях уравнения

$$u(\varphi+\omega) = u(\varphi) + F(\varphi) - \bar{F}(\varphi), \tag{2.18}$$

где $F(\varphi)$ — периодическая по φ функция с периодом 2π. Представим $F(\varphi)$ и $u(\varphi)$ в виде рядов Фурье:

$$F(\varphi) = \sum_k F_k e^{i(k,\varphi)}; \tag{2.19}$$

$$u(\varphi) = \sum_k u_k e^{i(k,\varphi)}. \tag{2.20}$$

Подставляя (2.19) и (2.20) в (2.18), для определения коэффициентов u_k получаем соотношение

$$u_k e^{i(k,\omega)} = u_k + F_k - F_0. \tag{2.21}$$

Из (2.21) следует, что уравнение (2.18) имеет периодическое решение лишь тогда, когда $u_0 = 0$ и

$$e^{i(k,\omega)} - 1 \neq 0 \tag{2.22}$$

при $|k| \neq 0$. Решая уравнение (2.21), получаем

$$u_k = \frac{F_k}{e^{i(k,\omega)} - 1};$$

следовательно, ряд

$$u(\varphi) = \sum_{|k| \neq 0} \frac{F_k}{e^{i(k,\omega)} - 1} e^{i(k,\varphi)} \tag{2.23}$$

является формальным решением уравнения (2.18).

Докажем, что ряд (2.22) является сходящимся при выполнении некоторых дополнительных условий. Эти условия устанавливает [49]

Лемма 6.6. *Пусть $F(\varphi)$ является $r = 2m + \sigma + 1$ раз непрерывно дифференцируемой функцией, а постоянный вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)$ с несоизмеримыми компонентами удовлетворяет неравенству*

$$\left| \sin \frac{(k,\omega)}{2} \right| \geq \frac{c}{|k|^m}, \tag{2.24}$$

выполняющемуся для любого целочисленного вектора $k = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$. Тогда ряд (2.23) будет σ раз непрерывно дифференцируемым периодическим с периодом 2π решением уравнения (2.18), удовлетворяющим неравенству

$$|u(\varphi)|_\sigma \leq c_1 \max_i |D^\tau_{\varphi_i} F(\varphi)|_0, \tag{2.25}$$

в котором c_1 — постоянная, зависящая от c, m, τ.

Доказательство. Поскольку $F(\varphi)$ является τ раз непрерывно дифференцируемой функцией, то

$$|F_k| \leq (\max_i |k_i|)^{-\tau} \max_i |D^\tau_{\varphi i} F(\varphi)| \tag{2.26}$$

при $|k|\neq 0$. С учетом неравенств (2.24) и (2.26) из соотношения (2.23) получаем оценку

$$|D_\varphi^\rho u(\varphi)| = \left|\sum_{|k|\neq 0} \frac{(ik_1)^{\rho_1}\dots(ik_m)^{\rho_m}}{e^{i(\omega,k)}-1} F_k e^{i(k,\varphi)}\right| \leqslant c^{-1} \sum_{|k|\neq 0} \max_l |k_l|^{|\rho|}|k|^m \times$$

$$\times |F_k| \leqslant c^{-1} \max_l |D_\varphi^\tau {}_l F(\varphi)|_0 \sum_{|k|\neq 0} (\max_l |k_l|)^{-\tau+|\rho|} |k|^m \leqslant$$

$$\leqslant c^{-1} \max_l |D_\varphi^\tau {}_l F(\varphi)|_0 \sum_{l=1}^{\infty} m^\tau \sum_{|k|=l} |k|^{-\tau+m+|\rho|} \leqslant$$

$$\leqslant c^{-1} m^\tau \max_l |D_\varphi^\tau {}_l F(\varphi)|_0 \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\tau+m+|\rho|} \sum_{|k|=l} 1 \leqslant$$

$$\leqslant c^{-1} m^\tau \max_l |D_\varphi^\tau {}_l F(\varphi)|_0 \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\tau+2m+|\rho|-1} \leqslant c_1 \max_l |D_\varphi^\tau {}_l F(\varphi)|_0.$$

Из этого неравенства следует сходимость ряда (2.23), его дифференцируемость σ раз и оценка (2.25).

§ 3. СУЩЕСТВОВАНИЕ ИНВАРИАНТНОГО ТОРОИДАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему разностных уравнений

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \varphi_n + a(\varphi_n, y_n, \mu), \\ y_{n+1} &= [E + b(\varphi_n, y_n, \mu)]\, y_n + c(\varphi_n, \mu), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $y=(y^1, y^2, \dots, y^s)$; $\varphi=(\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m)$; $a(\varphi, y, \mu)$, $b(\varphi, y, \mu)$, $c(\varphi, \mu)$ — периодические по φ с периодом 2π функции, определенные в области

$$\|y\| = \left(\sum_{i=1}^{m} (y^i)^2\right)^{1/2} \leqslant d, \quad \mu \in [0, \mu_0]. \tag{3.2}$$

Нас будет интересовать вопрос существования инвариантных торов системы (3.1) в предположении, что $c(\varphi, 0)=0$, т. е. что при $\mu=0$ система (3.1) имеет тривиальный инвариантный тор $y\equiv 0$. Под инвариантной будем понимать поверхность, обладающую следующим свойством: если в начальный момент $n=k$ решение системы (3.1) лежит на этой поверхности, то оно остается на ней при всех n.

Инвариантное многообразие $\mathfrak{T}(\mu)$ системы (3.1) будем искать в виде

$$y = u(\varphi, \mu), \tag{3.3}$$

где $u(\varphi, \mu)$ — непрерывная периодическая по φ с периодом 2π функция. Выражение (3.3) будет определять инвариантный тор $\mathfrak{T}(\mu)$, если для всех целых n выполняется соотношение

$$u(\varphi_{n+1}(\varphi), \mu) = [E + b(\varphi_n(\varphi), u(\varphi_n(\varphi), \mu), \mu)]\, u(\varphi_n(\varphi), \mu) + c(\varphi_n(\varphi), \mu), \tag{3.4}$$

где $\varphi_n(\varphi)$ — решение системы

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + a(\varphi_n, u(\varphi_n, \mu), \mu), \quad \varphi_k(\varphi) = \varphi, \tag{3.5}$$

k — любое целое число, φ — произвольная постоянная.

Инвариантное тороидальное множество $\mathfrak{T}(\mu)$ будем искать как предел последовательности множеств $\mathfrak{T}^0(\mu), \mathfrak{T}^{(1)}(\mu), \ldots, \mathfrak{T}^i(\mu), \ldots$, каждое из которых является инвариантным тором

$$\mathfrak{T}^i(\mu): y = u^i(\varphi, \mu), \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{3.6}$$

системы уравнений

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \varphi_n + a(\varphi_n, u^{i-1}(\varphi_n, \mu), \mu), \\ y_{n+1} &= [E + b(\varphi_n, u^{i-1}(\varphi_n, \mu), \mu)]\, y_n + c(\varphi_n, \mu). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Возможность нахождения $\mathfrak{T}(\mu)$ таким путем обосновывает следующее утверждение [123].

Лемма 6.7. *Пусть функции $a(\varphi, y, \mu)$, $b(\varphi, y, \mu)$, $c(\varphi, \mu)$ являются непрерывными по φ, y при $\|y\| \leqslant d$, $\mu \in [0, \mu_0]$. Тогда, если последовательность (3.6) равномерно сходится для любого $\mu \in [0, \mu_0]$:*

$$\lim_{i \to \infty} u^i(\varphi, \mu) = u(\varphi, \mu), \tag{3.8}$$

то предельная функция $u(\varphi, \mu)$ определяет инвариантный тор $\mathfrak{T}(\mu): y = u(\varphi, \mu)$ системы (3.1).

Действительно, поскольку $y = u^i(\varphi, \mu)$ — инвариантный тор системы (3.7), то для решений φ_n^i, y_n^i, лежащих на нем, выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \varphi_n^i &= \varphi + \sum_{j=k}^{n-1} a(\varphi_j^i, u^{i-1}(\varphi_j^i, \mu), \mu), \\ u^i(\varphi_n^i, \mu) &= u^i(\varphi, \mu) + \sum_{j=k}^{n-1} [b(\varphi_j^i, u^{i-1}(\varphi_j^i, \mu), \mu)\, u^i(\varphi_j^i, \mu), \mu) + c(\varphi_j^i, \mu)]. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Введем вспомогательную последовательность кусочно-линейных непрерывных функций, определяемых соотношением

$$f^i(t) = \varphi_n^i + (t - n)(\varphi_{n+1}^i - \varphi_n^i), \quad n \leqslant t \leqslant n + 1. \tag{3.10}$$

Заметим, что $f^i(n) = \varphi_n^i$ при всех целых n. С учетом неравенства $|u^{i-1}| \leqslant d$, периодичности и непрерывности функции $a(\varphi, y, \mu)$

при $\|y\| \leqslant d$ следует равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность последовательности функций $f^i(t)$, $i=0, 1, \ldots$, для t из любого конечного отрезка T вещественной прямой $R: -\infty < t < \infty$. Поэтому последовательность $f^i(t)$ содержит равномерно сходящуюся на T подпоследовательность $f^{i_\nu}(t)$, $t=0, 1, \ldots$ Положим

$$f(t) = \lim_{\nu\to\infty} f^{i_\nu}(t), \quad t \in T. \tag{3.11}$$

Учитывая, что $f(n) = \varphi_n$, где $\varphi_n = \lim\limits_{\nu\to\infty} \varphi_n^{i_\nu}$, перейдем к пределу в равенствах, получаемых из (3.9) при $i=i_\nu$. Предположение о непрерывности функций a, b, c и u^{i-1} обеспечивает законность всех перестановок предела, необходимых для получения из (3.8), (3.9) и (3.11) тождеств, показывающих, что непрерывная периодическая функция $y=u(\varphi, \mu)$ является инвариантным тором системы (3.1).

Таким образом, вопрос существования инвариантного тора системы (3.1) связан с вопросом существования инвариантного тора системы (3.7).

Множество $\mathfrak{T}^{i+1}(\mu)$ будем искать, используя функцию Грина для задачи об ограниченных решениях линейной системы уравнений

$$y_{n+1} = [E + b(\varphi_n(\varphi), u^i(\varphi_n(\varphi), \mu), \mu)]\, y_n + c(\varphi_n(\varphi), \mu), \tag{3.12}$$

полученной из системы (3.7) заменой в ней φ_n на общее решение $\varphi_n(\varphi)$, $\varphi_k(\varphi) = \varphi$ первого уравнения системы (3.7). Пусть $G(n, k, \varphi, \mu)$ — указанная функция Грина. Тогда

$$y_n(\varphi, \mu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(n-1, k, \varphi, \mu)\, c(\varphi_k(\varphi), \mu) \tag{3.13}$$

является семейством ограниченных решений системы (3.12), зависящих от φ, μ как от параметров. Это семейство покрывает инвариантное тороидальное множество

$$\mathfrak{T}^{i+1}(\mu): y = u^{i+1}(\varphi, \mu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(0, k, \varphi, \mu)\, c(\varphi_k, \mu), \tag{3.14}$$

если функция $G(0, k, \varphi, \mu)\, c(\varphi_k(\varphi))$ — периодическая по φ с периодом 2π и такова, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} G(0, k, \varphi_n(\varphi), \mu)\, c(\varphi_k(\varphi_n(\varphi)), \mu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(n-1, k, \varphi, \mu) c(\varphi_k(\varphi), \mu). \tag{3.15}$$

Если функция $G(n, k, \varphi, \mu)$ удовлетворяет указанным выше условиям, то система (3.7) имеет инвариантное тороидальное множество $\mathfrak{T}^i(\mu): y = u^i(\varphi, \mu)$, которое определяется выражением

$$u^i(\varphi, \mu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(0, k, \varphi, \mu)\, c(\varphi_k(\varphi), \mu). \tag{3.16}$$

Функцию $G(0, k, \varphi, \mu)$, определяющую согласно (3.16) инвариантный тор $y=u^i(\varphi, \mu)$ системы (3.7), назовем функцией Грина для задачи об инвариантных торах системы (3.7). Укажем ее общий вид.

Пусть имеется система уравнений вида

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + a(\varphi_n, \mu), \quad y_{n+1} = [E + b(\varphi_n, \mu)]\, y_n. \tag{3.17}$$

Обозначим через $\Omega_n^k(\varphi, \mu)$ фундаментальную матрицу решений линейной системы

$$y_{n+1} = [E + b(\varphi_n(\varphi, \mu), \mu)]\, y_n, \tag{3.18}$$

в которой $\varphi_n(\varphi, \mu)$ — решение первого уравнения (3.17), $\varphi_k(\varphi, \mu) = \varphi$. Рассмотрим функцию

$$G_0(k, \varphi, \mu) = \begin{cases} \Omega_0^k(\varphi, \mu)\, c(\varphi_k(\varphi, \mu), \mu) & \text{при } k < 0, \\ E & \text{при } k = 0, \\ \Omega_0^k(\varphi, \mu)\,(c(\varphi_k(\varphi, \mu), \mu) - E) & \text{при } k > 0, \end{cases} \tag{3.19}$$

где $c(\varphi, \mu)$ — периодическая по φ с периодом 2π матрица. Предположим, что $G_0(k, \varphi, \mu)$ такова, что выполняется неравенство

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |G_0(k, \varphi, \mu)| < K < \infty. \tag{3.20}$$

С учетом тождества $\varphi_n(\varphi + 2\pi, \mu) = \varphi_n(\varphi, \mu) + 2\pi$ получаем, что

$$G(n, k, \varphi, \mu) = \begin{cases} \Omega_n^k(\varphi, \mu)\, c(\varphi_k(\varphi, \mu), \mu) & \text{при } k < n, \\ E & \text{при } k = n, \\ \Omega_n^k(\varphi, \mu)\,(c(\varphi_k(\varphi, \mu), \mu) - E) & \text{при } k > n \end{cases} \tag{3.21}$$

является функцией Грина для задачи об ограниченных решениях системы

$$y_{n+1} = (E + b(\varphi_n(\varphi, \mu), \mu))\, y_n + c(\varphi_n(\varphi, \mu), \mu). \tag{3.22}$$

Следовательно, $G_0(k, \varphi, \mu) = G(0, k, \varphi, \mu)$ — функция Грина для задачи об инвариантных торах системы (3.17), если функция $G(n, k, \varphi, \mu)$ удовлетворяет условию (3.15). Последнее легко установить, если учесть соотношение

$$\Omega_n^k(\varphi_p(\varphi, \mu), \mu) = \Omega_{n+p}^{k+p}(\varphi, \mu) \tag{3.23}$$

для любых целых n, k, p.

Рассмотрим теперь систему разностных уравнений

$$\begin{aligned} \varphi_{n+k} &= \varphi_n + a_0(\varphi_n) + a_1(\varphi_n), \\ y_{n+1} &= [E + b_0(\varphi_n) + b_1(\varphi_n)]\, y_n + c(\varphi_n), \end{aligned} \tag{3.24}$$

где $a_0(\varphi)$, $b_0(\varphi)$, $a_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $c(\varphi)$ — непрерывно дифференцируемые функции; $a_0(\varphi)$, $b_0(\varphi)$ — фиксированные; $a_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, $c(\varphi)$ — произвольные, но малые в смысле нормы $c'(\varphi)$ функции. Обозначим через $\varphi_n(\varphi)$ $(\varphi_k(\varphi)=\varphi)$ решение первого из уравнений (3.24).

Имеет место следующее утверждение [123].

Лемма 6.8. *Пусть система уравнений (3.24) такова, что при всех $a_1(\varphi)$, $b_1(\varphi)$, удовлетворяющих неравенству*

$$\max\{|a_1(\varphi)|_1, |b_1(\varphi)|_1\} \leqslant M, \tag{3.25}$$

существует функция Грина $G_0(k, \varphi)$ задачи об инвариантных торах, удовлетворяющая условию

$$|G_0(k, \varphi)\, c(\varphi_k(\varphi))|_1 \leqslant K\lambda^{|k|}|c(\varphi)|_1 \tag{3.26}$$

для всех целых k, причем $M>0$, $0<\lambda<1$. Тогда система (3.24) имеет инвариантный тор $\mathfrak{T}: y=u(\varphi)$, для которого $u(\varphi)$ — непрерывно-дифференцируемая функция, удовлетворяющая неравенству

$$|u(\varphi)|_1 \leqslant \frac{2K}{1-\lambda}|c(\varphi)|_1. \tag{3.27}$$

Утверждение леммы 6.8 следует из представления

$$u(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_0(k, \varphi)\, c(\varphi_k(\varphi)) \tag{3.28}$$

и условия (3.26).

Применим теперь лемму 6.8 для построения последовательности инвариантных торов (3.6). Для этого поступим следующим образом. Положим

$$\begin{gathered} a_0(\varphi) = a(\varphi, 0, 0), \quad b_0(\varphi) = b(\varphi, 0, 0), \\ a_1(\varphi, y, \mu) = a(\varphi, y, \mu) - a(\varphi, 0, 0), \\ b_1(\varphi, y, \mu) = b(\varphi, y, \mu) - b(\varphi, 0, 0) \end{gathered} \tag{3.29}$$

и предположим, что $c(\varphi, \mu)$, $a(\varphi, y, \mu)$ и $b(\varphi, y, \mu)$ непрерывно дифференцируемы при $\|y\| \leqslant d$, $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0$. Пусть

$$\max\{|a_1(\varphi, y, \mu)|_1, |b_1(\varphi, y, \mu)|_1, |c(\varphi, \mu)|_1\} \leqslant L(d, \mu_0), \tag{3.30}$$

где $L(d, \mu_0) \to 0$ при $d \to 0$ и $\mu_0 \to 0$. Тогда справедлива

Теорема 6.1 [123]. *Пусть функции $a_0(\varphi)$ и $b_0(\varphi)$ таковы, что система (3.24) удовлетворяет условиям леммы 6.8. Тогда можно указать такое число μ^0, $0 \leqslant \mu^0 \leqslant \mu_0$, что при всех $\mu < \mu^0$ последовательность систем (3.7) определяет последовательность инвариантных торов (3.6), каждый из которых непрерывно дифференцируем и удовлетворяет неравенству*

$$|u^i(\varphi, \mu)|_1 \leqslant \frac{2K}{1-\lambda} L(0, \mu^0). \tag{3.31}$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 4.1.

Докажем теперь сходимость последовательности инвариантных торов (3.6). Поскольку $y = u^{i+1}(\varphi, \mu)$ является инвариантным тором системы (3.7), то функция $u^{i+1}(\varphi, \mu)$ удовлетворяет уравнению

$$u^{i+1}(\varphi_{n+1}, \mu) = (E + b_0(\varphi_n) + b_1(\varphi_n, u^i(\varphi_n, \mu), \mu))\, u^{i+1}(\varphi_n, \mu) + c(\varphi_n, \mu) \tag{3.32}$$

где $\varphi_n = \varphi_n(\varphi, \mu)$ — общее решение уравнения

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + a_0(\varphi_n) + a_1(\varphi_n, u^i(\varphi_n, \mu), \mu); \tag{3.33}$$

$a_0(\varphi)$, $b_0(\varphi)$, $a_1(\varphi, y, \mu)$ и $b_1(\varphi, y, \mu)$ определяются соотношениями (3.29). Так как равенство (3.32) выполняется при любом n, то при $n = 0$ функция $u^{i+1}(\varphi, \mu)$ является периодическим по φ с периодом 2π решением функционального уравнения

$$u^{i+1}(\varphi + a_0(\varphi) + a_1(\varphi, u^i(\varphi, \mu), \mu), \mu) =$$

$$= [E + b_0(\varphi) + b_1(\varphi, u^i(\varphi, \mu), \mu)] \cdot u^{i+1}(\varphi, \mu) + c(\varphi, \mu). \tag{3.34}$$

Положим

$$u^{i+1}(\varphi, \mu) - u^i(\varphi, \mu) = w^{i+1}(\varphi, \mu). \tag{3.35}$$

Тогда функция $w^{i+1}(\varphi, \mu)$ является периодическим по φ с периодом 2π решением уравнения

$$w^{i+1}(\varphi + a_0(\varphi) + a_1(\varphi, u^i(\varphi, \mu), \mu), \mu) - [E + b_0(\varphi) + b_1(\varphi, u^i(\varphi, \mu),$$

$$\mu)]\, w^{i+1}(\varphi, \mu) = u^i(\varphi + a_0(\varphi) + a_1(\varphi, u^{i-1}(\varphi, \mu), \mu), \mu) -$$

$$- u^i(\varphi + a_0(\varphi) + a_1(\varphi, u^i(\varphi, \mu), \mu), \mu) + b_1(\varphi, u^i(\varphi, \mu), \mu)\, u^i(\varphi, \mu) -$$

$$- b_1(\varphi, u^{i-1}(\varphi, \mu), \mu)\, u^i(\varphi, \mu) \tag{3.36}$$

и, следовательно, определяет инвариантный тор $y = w^{i+1}(\varphi, \mu)$ системы разностных уравнений

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \varphi_n + a_0(\varphi_n) + a_1(\varphi_n, u^i(\varphi_n, \mu), \mu), \\ y_{n+1} &= [E + b_0(\varphi_n) + b_1(\varphi_n, u^i(\varphi_n, \mu), \mu)]\, y_n + c_i(\varphi_n, \mu), \end{aligned} \tag{3.37}$$

где через $c_i(\varphi, \mu)$ обозначена правая часть уравнения (3.36). Система (3.37) имеет вид системы (3.24), а поэтому $w^{i+1}(\varphi, \mu)$ можно записать с помощью функции Грина задачи об инвариантных торах системы (3.6):

$$w^{i+1}(\varphi, \mu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_0(k, \varphi)\, c_i(\varphi_k, \mu). \tag{3.38}$$

Тогда с учетом неравенства (3.27) получаем оценку

$$|w^{l+1}(\varphi, \mu)|_0 \leqslant \frac{2K}{1-\lambda} |c_l(\varphi, \mu)|_0 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2K}{1-\lambda} |u^k|_1 (|a_1|_1 + |b_1|_1) |w^l(\varphi, \mu)|_0. \tag{3.39}$$

В силу неравенств (3.27) и (3.30) находим

$$w^{l+1}(\varphi, \mu)|_0 \leqslant \rho_0 |w^l(\varphi, \mu)|_0 \leqslant \rho_0^{l-1} |u^1(\varphi, \mu)|_0 \leqslant \rho_0^{l-1} \frac{2K}{1-\lambda} |c(\varphi, \mu)|_0, \tag{3.40}$$

где ρ_0 — положительная константа, меньшая единицы при малых μ_0. Неравенство (3.40) доказывает равномерную сходимость последовательности инвариантных торов (3.6) и непрерывность предельной функции по μ при $\mu=0$.

Из приведенных выше рассуждений следует [123]

Лемма 6.9. *Пусть выполняются условия теоремы 6.1. Тогда последовательность (3.6) инвариантных торов системы (3.7) равномерно сходится к функции $u(\varphi, \mu)$:*

$$\lim_{l\to\infty} u^l(\varphi, \mu) = u(\varphi, \mu),$$

причем

$$\lim_{\mu\to 0} |u(\varphi, \mu)|_0 = 0. \tag{3.41}$$

Из леммы 6.7 и 6.9 вытекает основная теорема существования инвариантного тора возмущенной системы разностных уравнений (3.1).

Теорема 6.2 [123]. *Предположим, что правая часть системы*

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \varphi_n + a_0(\varphi_n, y_n, \mu), \\ y_{n+1} &= [E + b(\varphi_n, y_n, \mu)]\, y_n + c(\varphi_n, \mu), \end{aligned} \tag{3.42}$$

удовлетворяет следующим условиям:

1) функции $a(\varphi, y, \mu)$, $b(\varphi, y, \mu)$, c $\varphi, \mu)$ непрерывно дифференцируемы при $\|y\| \leqslant d$, $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0$;

2) $\max\{|a(\varphi, y, \mu) - a(\varphi, 0, 0)|_1, |b(\varphi, y, \mu) - b(\varphi, 0, 0)|_1, |c(\varphi, \mu)|_1\} = L(d, \mu_0)$, *где $L(d, \mu_0) \to 0$ при $d \to 0$, $\mu_0 \to 0$;*

3) для любых достаточно малых по норме $c'(\varphi)$ функций $b_1(\varphi)$, $a_1(\varphi)$ и $c_1(\varphi)$ возмущенные линеаризованные уравнения

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \varphi_n + a(\varphi_n, 0, 0) + a_1(\varphi_n), \\ y_{n+1} &= [E + b(\varphi_n, 0, 0) + b_1(\varphi_n)]\, y_n + c_1(\varphi_n) \end{aligned} \tag{3.43}$$

имеют функцию Грина $G_0(k, \varphi)$ задачи об инвариантных торах, удовлетворяющую неравенству

$$|G_0(k, \varphi)\, c_1(\varphi_k(\varphi))|_1 \leqslant K\lambda^{|k|} |c_1(\varphi)|_1 \tag{3.44}$$

при всех целых k, где K — положительная постоянная, $0 < \lambda < 1$.

Тогда можно указать такое число μ^0, *что при всех* $0<\mu<\mu^0$ *система уравнений* (*3.1*) *имеет инвариантный тор* $\mathfrak{T}(\mu): y=u(\varphi, \mu)$, *для которого*

$$\lim_{\mu\to 0} |u(\varphi, \mu)|_0 = 0. \qquad (3.45)$$

Для практического применения изложенной выше схемы построения инвариантного тора конкретных систем вида (3.1) необходимо знать свойства функции Грина для задачи об инвариантных торах линеаризованной системы (3.43). Укажем некоторые из систем, для которых функция Грина для задачи об инвариантных торах существует и удовлетворяет неравенству (3.44).

Рассмотрим систему вида (3.32), для которой тривиальное решение системы

$$y_{n+1} = [E + b(\varphi_n(\varphi), 0, 0) + b_1(\varphi_n(\varphi))] y_n \qquad (3.46)$$

асимптотически устойчиво при всех достаточно малых по норме матриц $b_1(\varphi)$. Для таких систем функция Грина рассматриваемой задачи существует и имеет вид

$$G_0(k, \varphi) = \begin{cases} \Omega_0^k(\varphi) & \text{при } k<0, \\ E & \text{при } k=0, \\ 0 & \text{при } k>0, \end{cases} \qquad (3.47)$$

где $\Omega_n^k(\varphi)$ — фундаментальная матрица решений системы (3.46).

Пусть матрица в $(\varphi, 0, 0)$ такова, что

$$\max_{\langle\eta,\eta\rangle=1} \langle [E + b(\varphi, 0, 0)] [E + b(\varphi, 0, 0)]^{-1}\eta, \eta\rangle \leqslant \lambda, \qquad (3.48)$$

где $[E+b(\varphi, 0, 0)]^{-1}$ — матрица, транспонированная по отношению к матрице $[E+b(\varphi, 0, 0)]$, $0<\lambda<1$. При выполнении неравенства (3.48) легко показать, что функция $G_0(k, \varphi)$ удовлетворяет неравенству (3.44), поэтому имеет место [123]

Теорема 6.3. *Пусть система* (*3.1*) *удовлетворяет условиям 1 и 2 теоремы 6.2, а матрица* $b(\varphi, 0, 0)$ *такова, что выполняется неравенство* (*3.4*). *Тогда можно указать такое число* $\mu^0>0$, *что для всех* $0<\mu<\mu^0$ *система уравнений* (*3.1*) *имеет инвариантное тороидальное множество* $\mathfrak{T}(\mu): y=u(\varphi, \mu)$, *для которого* $\lim\limits_{\mu\to 0}|u(\varphi, \mu)|_0=0$.

§ 4. ПРИВОДИМОСТЬ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ТОРОИДАЛЬНОМ МНОЖЕСТВЕ

Рассмотрим систему разностных уравнений

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \omega + f(\varphi_n), \qquad (4.1)$$

где $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m)$, $f(\varphi) = (f^1(\varphi), f^2(\varphi), \dots, f^m(\varphi))$, $f(\varphi)$ — периодическая по φ с периодом 2π функция. Считая, что $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \dots$

$\ldots, \varphi^m)$ — угловые координаты на торе $\mathcal{T}_m$, будем интерпретировать (4.1) как динамическую систему, заданную на торе $\mathcal{T}_m$.

Наряду с системой (4.1) рассмотрим систему

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \omega + \Delta + f(\varphi_n, \Delta), \tag{4.2}$$

где $f(\varphi, \Delta)$, Δ — величины первого порядка малости. Покажем, что всегда можно выбрать такое преобразование $\varphi \to \theta$ и $\Delta \to \Delta^{(1)}$, чтобы система (4.2) принимала вид

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega + \Delta^{(1)} + f^{(1)}(\theta, \Delta^{(1)}), \tag{4.3}$$

где $\Delta^{(1)}$ и $f^{(1)}(\theta, \Delta^{(1)})$ — величины второго порядка малости. Существование такой замены устанавливает [59]

Теорема 6.4. *Пусть правая часть системы уравнений (4.2) удовлетворяет условиям:*

1) функция $f(\varphi, \Delta)$ является периодической по φ с периодом 2π, $l = l(s_0)$ раз непрерывно дифференцируемой по φ, Δ при

$$|\Delta| = \max_i |\Delta_i| \leqslant M_0^{-1} \tag{4.4}$$

и удовлетворяет неравенствам

$$|f(\varphi, \Delta)| = \max_i |f_i(\varphi, \Delta)| < \delta_0,$$
$$|D_\varphi^\rho D_\Delta^r f(\varphi, \Delta)| \leqslant N_0^{|\rho|} M_0^{|r|} \text{ при } |\rho| + |r| = l; \tag{4.5}$$

2) число $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)$ удовлетворяет неравенству

$$\left|\sin\left(\frac{k, \omega}{2}\right)\right| \geqslant \frac{c}{|k|^m} \tag{4.6}$$

Тогда можно указать такое δ^0, не зависящее от N_0, M_0 и $f(\varphi, \Delta)$, что для всех $\delta_0 \leqslant \delta^0$ существует преобразование

$$\varphi_n = \theta_n + u(\theta_n, \Delta^{(1)}), \quad \Delta = \Delta^{(1)} + v(\Delta^{(1)}), \tag{4.7}$$

приводящее систему (4.2) к виду

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega + \Delta^{(1)} + f^{(1)}(\theta_n, \Delta^{(1)}), \tag{4.8}$$

причем функции $u(\theta, \Delta^{(1)})$, $v(\Delta^{(1)})$, $f(\theta, \Delta^{(1)})$ определены в области $|\Delta^{(1)}| \leqslant M^{-1}$, являются периодическими по θ с периодом 2π, l раз непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют неравенствам

$$|v(\Delta^{(1)})| < M^{-1}, \quad |v(\Delta^{(1)})|_{s_0+1} < N^{-1}, \quad |u(\theta, \Delta^{(1)})|_{s_0+1} < N^{-1},$$
$$|f^{(1)}(\theta, \Delta^{(1)})| < \delta, \quad |D_\theta^\rho D_{\Delta^{(1)}}^r f^{(1)}(\theta, \Delta^{(1)})| \leqslant N^{|\rho|} M^{|r|} \text{ при } |\rho| + |r| = l, \tag{4.9}$$

где

$$N = N_0^\alpha, \quad M = N^\nu, \quad \delta = M^{-\beta}, \quad \alpha = 1 + \frac{1}{2(s_0+1)}, \quad \beta = s_0 + 2,$$

$$\nu = 4(m+1) + \frac{1}{4(s_0+2)^2}, \quad l(s_0) = 1 + 8(s_0+2)(m+1).$$

Доказательство. Для функции $F(\varphi)$, представимой рядом Фурье (2.18), обозначим

$$\overline{F(\varphi)} = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} F(\varphi)\, d\varphi^1 \ldots d\varphi^m,$$
$$\widetilde{F(\varphi)} = \sum_{|k| \neq 0} \frac{F_k}{e^{i(k,\omega)} - 1} e^{i(k,\varphi)} \tag{4.10}$$

и положим

$$\varphi = \theta + \widetilde{Tf(\theta, \Delta)}, \quad \Delta^{(1)} = \Delta + \overline{Tf(\theta, \Delta)}, \tag{4.11}$$

где $T = T_{NM}$ — оператор сглаживания, $\overline{Tf(\theta, \Delta)}$ — среднее значение по θ функции $Tf(\theta, \Delta)$:

$$\overline{Tf(\theta, \Delta)} = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} Tf(\theta, \Delta)\, d\theta^1 \ldots d\theta^m.$$

После замены (4.11) система уравнений (4.2) перейдет в систему

$$\theta_{n+1} + \widetilde{Tf(\theta_{n+1}, \Delta)} = \theta_n + \widetilde{Tf(\theta_n, \Delta)} + \omega + \Delta + f(\theta_n + \widetilde{Tf(\theta_n, \Delta)}, \Delta), \tag{4.12}$$

которую представим в виде

$$\theta_{n+1} - \theta_n - \omega = \widetilde{Tf(\theta_n, \Delta)} + \Delta - \widetilde{Tf(\theta_{n+1}, \Delta)} + f(\theta_n + \widetilde{Tf(\theta_n, \Delta)}, \Delta) -$$
$$- \widetilde{Tf(\theta_n + \omega, \Delta)} + \widetilde{Tf(\theta_n + \omega, \Delta)} + Tf(\theta_n, \Delta) - Tf(\theta_n, \Delta) -$$
$$- \overline{Tf(\theta_n, \Delta)} + \overline{Tf(\theta_n, \Delta)}. \tag{4.13}$$

Выберем $\widetilde{Tf(\theta_n, \Delta)}$ периодическим решением уравнения (2.17), т. е. уравнения

$$\widetilde{Tf(\theta_n + \omega, \Delta)} = \widetilde{Tf(\theta_n, \Delta)} + Tf(\theta_n, \Delta) - \overline{Tf(\theta_n, \Delta)}.$$

В силу такого выбора соотношен е (4.13) можно записать в виде

$$\theta_{n+1} - \theta_n - \omega = \Delta^{(1)} - [\widetilde{Tf(\theta_{n+1} - \theta_n - \omega + \theta_n + \omega, \Delta)} -$$
$$- \widetilde{Tf(\theta_n + \omega, \Delta)}] + f(\theta_n + \widetilde{Tf(\theta_n, \Delta)}, \Delta) - Tf(\theta_n, \Delta). \tag{4.14}$$

Решая (4.14) относительно $\theta_{n+1} - \theta_n - \omega$, получаем уравнение

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega + \Delta^{(1)} + f_1^{(1)}(\theta_n, \Delta, \Delta_1), \tag{4.15}$$

где

$$f_1^{(1)}(\theta_n, \Delta, \Delta_1) = \left[\left(E + \frac{\partial \widetilde{Tf}}{\partial \theta}\right)^{-1} - E\right] \Delta^{(1)} + \left(E - \frac{\partial \widetilde{Tf}}{\partial \theta}\right)^{-1} \times$$
$$\times [f(\theta_n + \widetilde{Tf}, \Delta) - Tf(\theta_n, \Delta)].$$

Решая второе уравнение (4.11) относительно Δ: $\Delta=\Delta(\Delta^{(1)})$ и подставляя это значение Δ в первое уравнение (4.11), приходим к системе уравнений (4.8), в которой

$$f^{(1)}(\theta_n, \Delta^{(1)}) = f_1^{(1)}(\theta_n, \Delta(\Delta^{(1)}), \Delta^{(1)}). \tag{4.16}$$

Следовательно, для доказательства теоремы 6.4 можно положить

$$u = \widetilde{Tf(\theta, \Delta(\Delta^{(1)}))}, \quad v = \Delta(\Delta^{(1)}) - \Delta^{(1)}$$

и доказать оценки (4.9). Для функций $v(\Delta^{(1)})$ и $u(\theta, \Delta^{(1)})$ эти оценки аналогичны [10].

Оценим фукцию $f^{(1)}(\theta_n, \Delta^{(1)})$. Используя оценки для $v(\Delta^{(1)})$ и $u(\theta, \Delta^{(1)})$, легко установить неравенства

$$\left|\left(E + \frac{\partial \widetilde{Tf}}{\partial \theta}\right)^{-1}\right| < c_3, \quad \left|\left(E + \frac{\partial \widetilde{Tf}}{\partial \theta}\right)^{-1} - E\right| =$$

$$= \left|\frac{\partial \widetilde{Tf}}{\partial \theta}\left(E + \frac{\partial \widetilde{Tf}}{\partial \theta}\right)^{-1}\right| < c_3, \quad \left|\frac{\partial \widetilde{Tf}}{\partial \vartheta}\right| < \bar{c}_3 N^{2(m+1)}\delta_0, \tag{4.17}$$

в силу которых находим

$$|f^{(1)}(\theta, \Delta^{(1)})| < \bar{c}_3 N^{2(m+1)}\delta_0 M^{-1} + c_3 [\,|f(\theta_n + \widetilde{Tf(\theta_n, \Delta)}, \Delta) -$$

$$- Tf(\theta_n + \widetilde{Tf(\theta_n, \Delta)}, \Delta)|_0 + |Tf(\theta_n + \widetilde{Tf(\theta_n, \Delta)}, \Delta) - Tf(\theta_n, \Delta)|_0]. \tag{4.18}$$

Используя свойства сглаживающих операторов, выражающиеся неравенствами (1.13), (1.14), получаем оценки

$$|f(\theta, \Delta) - Tf(\theta, \Delta)|_0 \leqslant cN^{-l}N_0^l = c\left(\frac{N_0}{N}\right)^l = cN_0^{(1-\alpha)l}; \tag{4.19}$$

$$|Tf(\theta + \widetilde{Tf}, \Delta) - Tf(\theta, \Delta)|_0 < m\left|\frac{\partial Tf(\theta, \Delta)}{\partial \vartheta}\right|_0 |\widetilde{Tf}|_0 \leqslant$$

$$\leqslant c_4 N\delta_0 |\widetilde{Tf}|_0 \leqslant \bar{c}_4 N^{2(m+1)}\delta_0^2. \tag{4.20}$$

С учетом (4.19) и (4.20) из (4.18) находим

$$|f^{(1)}(\theta, \Delta^{(1)})| \leqslant c_5 (N^{\alpha(m+1)} M_0^{\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\beta-\alpha} + N_0^{(1-\alpha)l+\alpha\beta\nu} +$$

$$+ N^{2(m+1)} M_0^{-\beta(2-\alpha)})\, \delta_0^{\alpha} \leqslant \delta^0.$$

Оценка производных функции $f^{(1)}(\theta_n, \Delta^{(1)})$ порядка l производится аналогично тому, как это делается в работе [10].

Применим теперь теорему 6.4 для доказательства теоремы о приводимости системы разностных уравнений на торе.

Теорема 6.5 [59]. *Пусть задана система разностных уравнений*

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \omega + \Delta + f(\varphi_n), \tag{4.21}$$

где $f(\varphi) = (f^1(\varphi), f^2(\varphi), \ldots, f^m(\varphi))$ *— периодическая по* φ *с периодом* 2π *вектор-функция,* $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)$ *— вектор с несоизмеримыми компонентами такой, что при любом целочисленном* $k = (k_1, k_2, \ldots \ldots, k_m)$ *выполняется неравенство*

$$\left|\sin\frac{(k, \omega)}{2}\right| \geqslant \frac{c}{|k|^m}, \quad |k| \neq 0. \tag{4.22}$$

Тогда для заданных положительных постоянных ε, c_0 *и целочисленных* $s_0 \geqslant 1$ *существуют* $\delta_0 = \delta_0(c_0, \varepsilon, s)$ *и целое число* $l = l(s_0)$ *такие, что если функция* $f(\varphi)$ *имеет непрерывно дифференцируемые производные порядка* l *и удовлетворяет неравенствам*

$$|f(\varphi)|_0 < \delta_0, \quad |f(\varphi)|_l < c_0,$$

то существуют постоянный вектор $\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_m)$, *удовлетворяющий неравенству*

$$|\Delta|_0 < \varepsilon,$$

и периодическая по $\theta = (\theta^1, \ldots, \theta^m)$ *с периодом* 2π s_0 *раз непрерывно дифференцируемая функция* $\Phi(\theta) = (\Phi^1, \ldots, \Phi^m)$, *удовлетворяющая неравенству*

$$|\Phi(\theta)|_{s_0} < \varepsilon,$$

такие, что система уравнений (4.21) заменой переменных

$$\varphi = \theta + \Phi(\theta) \tag{4.23}$$

приводится к виду

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega. \tag{4.24}$$

Доказательство. Допуская, что δ_0 настолько мало, что $\delta_0 < \delta^0 = \min(\varepsilon^\beta, c_0^{-\beta\nu})$, легко заметить, что условия теоремы 6.5 можно согласовать с условиями (4.5), а следовательно, к уравнению (4.21) можно применить теорему 6.4 и найти замену

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \varphi_n^{(1)} + u^{(1)}(\varphi_n^{(1)}, \Delta^{(1)}) = \varphi_n^{(1)} + T_{N_1M_1}f(\varphi_n^{(1)}, \Delta(\Delta^{(1)})), \\ \Delta &= \Delta(\Delta^{(1)}) = \Delta^{(1)} + v^{(1)}(\Delta^{(1)}), \end{aligned} \tag{4.25}$$

приводящую уравнение (4.21) к виду

$$\varphi_{n+1}^{(1)} = \varphi_n^{(1)} + \omega + \Delta^{(1)} + f^{(1)}(\varphi_n^{(1)}, \Delta^{(1)}), \tag{4.26}$$

где функции $u^{(1)}(\varphi_n^{(1)}, \Delta^{(1)})$, $v^{(1)}(\Delta^{(1)})$, $f^{(1)}(\varphi_n^{(1)}, \Delta^{(1)})$ — периодические по $\varphi^{(1)}$ с периодом 2π и удовлетворяющие неравенствам

$$\begin{gathered} |v^{(1)}(\Delta^{(1)})| \leqslant M_1^{-1} = M_0^{-\alpha}, \quad |v^{(1)}(\Delta^{(1)})|_{s_0+1} \leqslant N_1^{-1} = N_0^{-\alpha}, \\ |u^{(1)}(\varphi^{(1)}, \Delta^{(1)})|_{s_0+1} \leqslant N_1^{-1}, \quad |f^{(1)}(\varphi^{(1)}, \Delta^{(1)})| \leqslant \delta_1 \leqslant \delta_0^{-\alpha}, \\ |D^r_{\varphi^{(1)}} D^\rho_{\Delta^{(1)}} f^{(1)}(\varphi^{(1)}, \Delta^{(1)})| \leqslant N_1^{|r|} M_1^{|\rho|} \end{gathered} \tag{4.27}$$

при $|r| + |\rho| = l$ для $|\Delta^{(1)}| \leqslant M_1^{-1}$.

Неравенства (4.27) обеспечивают применимость теоремы 6.4 к системе (4.26), а поэтому для произвольного s, $s = 1, 2, \dots$, можно найти замену

$$\varphi_n^{(s-1)} = \varphi_n^{(s)} + u^{(s)}(\varphi_n^{(s)}, \Delta^{(s)}) = \varphi_n^{(s)} + \overline{T_{N_s M_s} f^{(s-1)}(\varphi^{(s)}, \Delta^{(s-1)}(\Delta^{(s)}))},$$
$$\Delta^{(s-1)} = \Delta^{(s-1)}(\Delta^{(s)}) = \Delta^{(s)} + v^{(s)}(\Delta^{(s)}), \tag{4.28}$$

приводящую уравнение для $\varphi_n^{(s-1)}$ к виду

$$\varphi_{n+1}^{(s)} = \varphi_n^{(s)} + \omega + \Delta^{(s)} + f^{(s)}(\varphi_n^{(s)}, \Delta^{(s)}); \tag{4.29}$$

здесь функции $u^{(s)}(\varphi^{(s)}, \Delta^{(s)})$, $v^{(s)}(\Delta^{(s)})$, $f^{(s)}(\varphi^{(s)}, \Delta^{(s)})$ — периодические по $\varphi^{(s)}$ с периодом 2π и удовлетворяющие неравенствам

$$|v^{(s)}(\Delta^{(s)})| \leqslant M_s^{-1} = M_{s-1}^{-\alpha},$$
$$|v^{(s)}(\Delta^{(s)})|_{s_0+1} \leqslant N_s^{-1} = M_{s-1}^{-\alpha},$$
$$|u^{(s)}(\varphi_n^{(s)}, \Delta^{(s)})|_{s_0+1} \leqslant N_s^{-1}, \tag{4.30}$$
$$|f^{(s)}(\varphi_n^{(s)}, \Delta^{(s)})| \leqslant \delta_s = \delta_{s-1}^{-\alpha},$$
$$|D^r_{\varphi^{(s)}} D^\rho_{\Delta^{(s)}} f^{(s)}(\varphi^{(s)}, \Delta^{(s)})| \leqslant N_s^{|r|} M_s^{|\rho|}$$

при $|r| + |\rho| = l$ для $|\Delta^{(s)}| \leqslant M_s^{-1}$.

Очевидно, что суперпозиция s замен (4.28) приводит к замене

$$\varphi_n = \varphi_n^{(s)} + \Phi^{(s)}(\varphi_n^{(s)}, \Delta^{(s)}) = \theta_n + \Phi^{(s)}(\theta_n, \Delta^{(s)}),$$
$$\Delta = A^{(s)}(\Delta^{(s)}) = \Delta^{(s)} + \Psi^{(s)}(\Delta^{(s)}), \tag{4.31}$$

связывающей φ, Δ с $\varphi^{(s)} = \theta$, $\Delta^{(s)}$ и приводящей исходное уравнение (4.21) к уравнению (4.29).

Поскольку $|\Delta^{(s)}| \leqslant M_s^{-1} \to 0$ и $|f^{(s)}(\theta, \Delta^{(s)})| \leqslant \delta_s \to 0$ при $s \to \infty$, то для доказательства теоремы о приводимости остается показать сходимость числовой последовательности $A^{(s)}(0)$ и равномерную сходимость последовательности функций $\Phi^{(s)}(\theta, 0)$ и ее производных до порядка s_0 [10]. Этим завершается доказательство теоремы, так как заменой переменных

$$\varphi_n = \theta_n + \Phi^{(\infty)}(\theta_n, 0)$$

уравнение (4.21) при $\Delta = A^{(\infty)}(0)$ приводится к виду

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega,$$

и эта замена, а также постоянная $A^{(\infty)}(0)$ будут удовлетворять всем условиям теоремы 6.4.

§ 5. ПРИВОДИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ТОРОИДАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА

Рассмотрим систему разностных уравнений

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= Ax_n + F(\varphi_n, x_n), \\ y_{n+1} &= \varphi_n + \omega + f(\varphi_n, x_n), \end{aligned} \tag{5.1}$$

где A — постоянная $(s\times s)$-мерная матрица; $F(\varphi, x)$, $f(\varphi, x)$ — периодические по $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m)$ с периодом 2π l_0 раз непрерывно дифференцируемые в области

$$\| x \| = \left(\sum_{l=1}^{s} (x^l)^2 \right)^{1/2} \leqslant \eta$$

вектор-функции, удовлетворяющие условию

$$F(\varphi, 0) = \left. \frac{\partial F(\varphi, x)}{\partial x} \right|_{x=0} = f(\varphi, 0) = 0.$$

В данном параграфе устанавливаются условия, при выполнении которых система (5.1) может быть приведена к системе вида

$$y_{n+1} = Ay_n, \quad \theta_{n+1} = \theta_n + \omega,$$

в которой матрица A и функции $F(\varphi, x)$, $f(\varphi, x)$ обладают свойствами, указанными в лемме 6.5, и являются величинами первого порядка малости. Положим

$$N_k = N_{k-1}^{\varkappa}, \quad \delta_k = \delta_{k-1}^{\varkappa}, \quad \delta_k = N_k^{-\beta} \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

где постоянные $\varkappa$, β, k_0, l_0 удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \varkappa &= \frac{3}{2}, \quad \beta = \frac{10}{9} + \frac{3}{2}(k_0 + s + 4), \\ l_0 &= \frac{13}{2} + \frac{9}{2}(k_0 + s + 4), \quad k_0 = s + 8. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Для указанных параметров справедливо следующее утверждение [49].

Теорема 6.6. *Пусть для системы уравнений (5.1) собственные числа матрицы A удовлетворяют неравенствам*

$$0 < |\lambda_j| < 1, \quad |\lambda_\alpha| |\lambda_\beta| |\lambda_j|^{-1} \leqslant \gamma_1 < 1 \tag{5.3}$$

для всех α, β, $j = 1, \ldots, s$; $F(\varphi, x)$, $f(\varphi, x)$ — периодические по φ с периодом 2π l_0 раз непрерывно дифференцируемые в области $\|x\| \leqslant \eta$ функции, удовлетворяющие условию

$$F(\varphi, 0) = \left. \frac{\partial F(\varphi, x)}{\partial x} \right|_{x=0} = f(\varphi, 0) = 0 \tag{5.4}$$

и неравенствам

$$|F(\varphi, x)| + |f(\varphi, x)| \leqslant \delta_{k-1}, \tag{5.5}$$

$$|D_\varphi^\rho D_x^r f(\varphi, x)| + |D_\varphi^\rho D_x^r F(\varphi, x)| \leqslant N_{k-1}^{l_0} \tag{5.6}$$

при $|\rho| + |r| = l_0$. *Тогда для достаточно малого* δ_0 *существует замена переменных*

$$x = y + \Upsilon(\theta, y), \quad \varphi = (\theta + \Phi(\theta, y) \tag{5.7}$$

с периодическими по θ *с периодом* 2π *функциями* $\Upsilon(\theta, y)$, $\Phi(\theta, y)$, *определенными в области*

$$\|y\| \leqslant \eta - N_{k-1}^{-1} \tag{5.8}$$

и удовлетворяющими условию

$$\Upsilon(\theta, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial \Upsilon(\theta, y)}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad \Phi(\theta, 0) = 0 \tag{5.9}$$

и неравенству

$$|\Upsilon(\theta, y)|_{k_0} + |\Phi(\theta, y)|_{k_0} \leqslant N_{k-1}^{-1}, \tag{5.10}$$

такая, что система уравнений (5.1) в переменных θ, y *примет вид*

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= Ay_n + F^{(1)}(\theta, y), \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \omega + f^{(1)}(\theta, y), \end{aligned} \tag{5.11}$$

где $F^{(1)}(\theta, y)$ *и* $f^{(1)}(\theta, y)$ — *периодические по* θ *с периодом* 2π l_0 *раз непрерывно дифференцируемые по* θ, y *в области (5.8) функции, удовлетворяющие условию*

$$F^{(1)}(\theta, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial F^{(1)}(\theta, y)}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad f^{(1)}(\theta, 0) = 0 \tag{5.12}$$

и неравенствам

$$|F^{(1)}(\theta, y)| + |f^{(1)}(\theta, y)| \leqslant \delta_k \quad (\|y\| \leqslant \eta - 2N_{k-1}^{-1}); \tag{5.13}$$

$$|D_\theta^\rho D_y^r F^{(1)}(\theta, y)| + |D_\theta^\rho D_y^r f^{(1)}(\theta, y)| \leqslant N_k^{l_0} \quad \text{при } |\rho| + |r| = l_0. \tag{5.14}$$

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned} \Upsilon(\theta, y) &= L^{(1)} T^1_{N_k N_k} F(\theta, y), \\ \Phi(\theta, y) &= L^{(0} T^0_{N_k N_k} f(\theta, y), \end{aligned} \tag{5.15}$$

где $T^1_{N_k N_k}$ и $T^0_{N_k N_k}$ — сглаживающие операторы T^1_{NM} и T^0_{NM} ($N = M = N_k$), рассмотренные в § 1, $L^{(1)}$ и $L^{(0)}$ — операторы, введ нные в лемме 6.5.

Из свойств сглаживающих операторов T^1_{NM} и T^0_{NM} и леммы 6.5 следует, что функции $\Upsilon(\theta, y)$ и $\Phi(\theta, y)$ определены в области

$$\|y\| \leqslant \eta - N_k^{-1}, \tag{5.16}$$

являются периодическими по θ с периодом 2π, непрерывно дифференцируемы по θ, y произвольное число раз, удовлетворяют условиям (5.12) и неравенству

$$|\Upsilon(\theta, y)|_{k_0} + |\Phi(\theta, y)|_{k_0} \leqslant 2a_0 c N_{k-1}^{\varkappa(k_0+3)-\beta} = 2a_0 c N_{k-1}^{-\frac{1}{9}} N_{k-1}^{-1} \leqslant N_{k-1}^{-1}. \tag{5.17}$$

Подставляя (5.7) в (5.1), получаем систему

$$\begin{aligned} y_{n+1} + \Upsilon(\theta_{n+1}, y_{n+1}) &= Ay_n + A\Upsilon(\theta_n, y_n) + \\ &+ F(y_n + \Upsilon(\theta_n, y_n), \theta_n + \Phi(\theta_n, y_n)), \\ \theta_{n+1} + \Phi(\theta_{n+1}, y_{n+1}) &= \theta_n + \omega + \Phi(\theta_n, y_n) + \Phi(y_n + \Upsilon(\theta_n, y_n), \\ &\theta_n + \Phi(\theta_n, y_n)), \end{aligned} \tag{5.18}$$

которую перепишем в виде

$$\begin{aligned} y_{n+1} - Ay_n &= -\Upsilon(\theta_n + \omega, Ay_n) + A\Upsilon(\theta_n, y_n) - [\Upsilon(\theta_{n+1} - \theta_n - \\ &- \omega + \theta_n + \omega, y_{n+1} - Ay_n + Ay_n) + \Upsilon(\theta_n + \omega, Ay_n)] + \\ &+ F(y_n + \Upsilon(\theta_n, y_n), \theta_n + \Phi(\theta_n, y_n)), \\ \theta_{n+1} - \theta_n - \omega &= -\Phi(\theta_n + \omega, Ay_n) + \Phi(\theta_n, y_n) - \\ &- [\Phi(\theta_{n+1} - \theta_n - \omega + \theta_n + \omega, y_{n+1} - Ay_n + Ay_n) - \\ &- \Phi(\theta_n + \omega, Ay_n)] + \Phi(y_n + \Upsilon(\theta_n, y_n), \theta_n + \Phi(\theta_n, y_n)). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Выбирая $\Upsilon(\theta_n, y_n)$, $\Phi(\theta_n, y_n)$ решениями систем соответственно (2.1), (2.2), систему (5.19) представим таким образом:

$$\begin{aligned} y_{n+1} - Ay_n &= -[\Upsilon(\theta_{n+1} - \theta_n - \omega + \theta_n + \omega, y_{n+1} - Ay_n + Ay_n) - \\ &- \Upsilon(\theta_n + \omega, Ay_n)] + F(y_n + \Upsilon(\theta_n, y_n), y_n + \Phi(\theta_n, y_n)) - T^1 F(\theta_n, y_n), \\ \theta_{n+1} - \theta_n - \omega &= -[\Phi(\theta_{n+1} - \theta_n - \omega + \theta_n + \omega, y_{n+1} - Ay_n + Ay_n) - \\ &- \Phi(\theta_n + \omega, Ay_n)] + f(y_n + \Upsilon(\theta_n, y_n), \theta_n + \Phi(\theta_n, y_n)) - T^0 f(\theta_n, y_n). \end{aligned} \tag{5.20}$$

Решая систему (5.20) относительно $y_{n+1} - Ay_n$ и $\theta_{n+1} - \theta_n - \omega$, что всегда возможно в силу оценки (5.17), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= Ay_n + F^{(1)}(\theta_n, y_n), \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \omega + f^{(1)}(\theta_n, y_n). \end{aligned} \tag{5.21}$$

Функции $F^{(1)}(\theta_n, y_n)$ и $f^{(1)}(\theta_n, y_n)$ определены в области (5.16), являются периодическими по θ с периодом 2π, l_0 раз непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условию (5.12). Для них справедливы следующие оценки:

$$|F^{(1)}(\theta, y)| + |f^{(1)}(\theta, y)| \leqslant c_1 [|F(\theta+\Phi, y+\Upsilon) - T^1F(\theta, y)| + \\ + |f(\theta+\Phi, y+\Upsilon) - T^0f(\theta, y)|] \leqslant c_1 [|F(\theta+\Phi, y+\Upsilon) - \\ - T^1F(\theta+\Phi, y+\Upsilon)| + |f(\theta+\Phi, y+\Upsilon) - T^0f(\theta+\Phi, y+\Upsilon)| + \\ + |T^1F(\theta+\Phi, y+\Upsilon) - T^1F(\theta, y)| + |T^0f(\theta+\Phi, y+\Upsilon) - T^0f(\theta, y)|]. \tag{5.22}$$

С учетом свойств сглаживающих операторов имеем

$$|F(\varphi, x) - T^1F(\varphi, x)| + |f(\varphi, x) - T^0f(\varphi, x)| \leqslant \\ \leqslant cN_s^{-l_0} [\sup_{\substack{|\rho|+|r|=l_0 \\ \|x\| \leqslant \eta}} (N_k |D^\rho_\varphi D^r_x F(\varphi, x)| + |D^\rho_\varphi D^r_x f(\varphi, x)|)] \leqslant \\ \leqslant cN_k \left(\frac{N_{k-1}}{N_k}\right)^{-l_0} = cN_{k-1}^{\varkappa+(1-\varkappa)l_0} = cN_{k-1}^{\varkappa(1+\beta)+(1-\varkappa)l_0}\delta_k = cN_{k-1}^{-\frac{1}{12}}\delta_k \leqslant \frac{1}{2}\delta_k,$$

$$|T^1F(\varphi, x) - T^1F(\theta, y)| + |T^0f(\varphi, x) - T^0f(\theta, y)| \leqslant \frac{1}{2}\delta_k,$$

откуда следует оценка

$$|F^{(1)}(\theta, y)| + |f^{(1)}(\theta, y)| \leqslant \delta_k.$$

Оценка (5.14) устанавливается аналогично тому, как это сделано в работе [10], что и завершает доказательство индуктивной теоремы.

Используя приведенную теорему, докажем следующую теорему о приводимости в окрестности тороидального множества $x=0$ [49, 66].

Теорема 6.7. *Пусть* $F(\varphi, x)$, $f(\varphi, x)$ — *периодические по* $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m)$ *с периодом* 2π *функции. Тогда для заданных* c_0, γ η, k_0, $k_0 \geqslant 2$, *существуют* $\delta_0 = \delta_0(c_0, \gamma, \eta, k_0)$ *и целое* $l_0 = l_0(k_0)$ *такие, что если функции* $F(\varphi, x)$ *и* $f(\varphi, x)$ l_0 *раз непрерывно дифференцируемы в области*

$$\|x\| \leqslant \eta, \quad x = (x^1, \ldots, x^s), \tag{5.23}$$

удовлетворяют условию

$$F(\varphi, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial F(\varphi, x)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad f(\varphi, 0) = 0 \tag{5.24}$$

и неравенствам

$$|F(\varphi, x)| + |f(\varphi, x)| \leqslant \delta_0, \tag{5.25}$$

$$|F(\varphi, x)|_{l_0} + |f(\varphi, x)|_{l_0} \leqslant c_0, \tag{5.26}$$

а собственные числа матрицы A удовлетворяют неравенствам

$$0<|\lambda_j|<1,\ |\lambda_\alpha||\lambda_\beta||\lambda_j|^{-1}\leqslant\gamma_1<1 \tag{5.27}$$

для любых α, β, $j=1,\ldots,s$, то существуют периодические по θ с периодом 2π k_0-1 непрерывно дифференцируемые в области

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{s}(x^i)^2\right)^{1/2}\leqslant\eta \tag{5.28}$$

функции $\Upsilon(\theta_n, y_n)$, $\Phi(\theta_n, y_n)$, удовлетворяющие условию

$$\Upsilon(\theta, 0)=0,\quad \left.\frac{\partial\Upsilon(\theta, y)}{\partial y}\right|_{y=0}=0,\quad \Phi(\theta, 0)=0 \tag{5.29}$$

и неравенству

$$|\Upsilon(\theta, y)|_{k_0-1}+|\Phi(\theta, y)|_{k_0-1}\leqslant\eta, \tag{5.30}$$

такие, что система уравнений

$$\begin{aligned} x_{n+1}&=Ax_n+F(\varphi_n, x_n),\\ \varphi_{n+1}&=\varphi_n+\omega+f(\varphi_n, x_n)\end{aligned} \tag{5.31}$$

заменой переменных

$$\begin{aligned} x_n&=y_n+\Upsilon(\theta_n, y_n),\\ \varphi_n&=\theta_n+\Phi(\theta_n, y_n)\end{aligned} \tag{5.32}$$

приводится к виду

$$\begin{aligned} y_{n+1}&=Ay_n,\\ \varphi_{n+1}&=\varphi_n+\omega.\end{aligned} \tag{5.33}$$

Доказательство. Из теоремы 6.7 следует, что общее решение системы (4.9) для всех $n\geqslant0$ имеет вид

$$x_n=A^ny_n+\Upsilon(n\omega+\theta_0, A^ny_0),$$

$$\varphi_n=n\omega+\theta_0+\Phi(n\omega+\theta_0, A^ny_0),$$

где θ_0, y_0 — произвольные постоянные. Так как матрица A действительна, то действительной линейной заменой $x_n\to Cx_n$ система уравнений (5.32) может быть приведена к системе такого же вида с матрицей A в действительной канонической форме с параметром ε_1, удовлетворяющим условию $\varepsilon_1+\gamma_1<1$. После этого можно выбрать δ_0 настолько малым, чтобы к системе (5.32) можно было применить теорему 6.6 при $k=1$. Это позволит найти такую замену переменных

$$\begin{aligned} x_n&=x_n^{(1)}+\Upsilon^{(1)}(\varphi_n^{(1)}, x_n^{(1)}),\\ \varphi_n&=\varphi_n^{(1)}+\Phi^{(1)}(\varphi_n^{(1)}, x_n^{(1)}),\end{aligned} \tag{5.34}$$

которая приведет (5.32) к системе

$$x_{n+1}^{(1)} = A^{(1)}x_n + F^{(1)}(\varphi_n^{(1)},\ x_n^{(1)}),$$
$$\varphi_{n+1}^{(1)} = \varphi_n^{(1)} + \omega + f^{(1)}(\varphi_n^{(1)},\ x_n^{(1)}) \tag{5.35}$$

и т. д. На k-ом шаге замена переменных

$$x_n^{(k-1)} = x_n^{(k)} + \Upsilon^{(k)}(\varphi_n^{(k)},\ x_n^{(k)}),$$
$$\varphi_n^{(k-1)} = \varphi_n^{(k)} + \Phi^{(k)}(\varphi_n^{(k)},\ x_n^{(k)}) \tag{5.36}$$

приведет систему уравнений для $x^{(k-1)}$ и $\varphi^{(k-1)}$ к системе

$$x_{n+1}^{(k)} = A^{(k)}x_n + F^{(k)}(\varphi_n^{(k)},\ x_n^{(k)}),$$
$$\varphi_{n+1}^{(k)} = \varphi_n^{(k)} + \omega + f^{(k)}(\varphi_n^{(k)},\ x_n^{(k)}). \tag{5.37}$$

При таких заменах в силу утверждений предыдущих теорем функции $\Upsilon^{(k)}$, $\Phi^{(k)}$, $F^{(k)}$, $f^{(k)}$ являются периодическими по $\varphi^{(k)}$ с периодом 2π, l_0 раз непрерывно дифференцируемы в области $\|x^{(k)}\| \leqslant \eta - (N_0^{-1} + N_1^{-1} + \ldots + N_{k-1}^{-1})$ и удовлетворяют условиям типа (5.29). Это значит, что суперпозиция замен (5.34)—(5.37), т. е. замена

$$x_n = x_n^{(k)} + x^{(k)}(\varphi_n^{(k)},\ x_n^{(k)}),$$
$$\varphi_n = \varphi_n^{(k)} + \psi^{(k)}(\varphi_n^{(k)},\ x_n^{(k)}), \tag{5.38}$$

приводит систему (5.32) к системе (5.37).

Очевидно, что верны соотношения

$$X^{(k+1)}(\theta_n,\ y_n) = \Upsilon^{(k+1)}(\theta_n,\ y_n) + X^{(k)}(\theta_n + \Phi^{(k+1)}(\theta_n,\ y_n),\ y_n + \Upsilon^{(k+1)}(\theta_n,\ y_n)),$$
$$\Psi^{(k+1)}(\theta_n,\ y_n) = \Phi^{(k+1)}(\theta_n,\ y_n) + \Psi^{(k)}(\theta_n + \Phi^{(k+1)}(\theta_n,\ y_n),\ y_n + \Upsilon^{(k+1)}(\theta_n,\ y_n)). \tag{5.39}$$

Дифференцируя их и предполагая, что $\|y\| \leqslant \eta + \sum_{\nu=0}^{k} N_\nu^{-1}$, получаем оценки

$$\sum_{|\rho|+|r|=1} |D_\theta^\rho D_y^r X^{(k)}(\theta,\ y)|_0 \leqslant b_1,$$
$$\sum_{|\rho|+|r|=1} |D_\theta^\rho D_y^r \Psi^{(k)}(\theta,\ y)|_0 \leqslant b_1, \tag{5.40}$$

где $b_1 \to 0$ при $N_0^{-1} \to 0$.

Выберем δ_0 таким образом, чтобы выполнялось еще и неравенство $\sum_{\nu=0}^{\infty} N_\nu^{-1} \leqslant \bar{\eta}$. Тогда для переменных θ, y в области $\|y\| \leqslant \eta - \bar{\eta}$ получим оценку

$$
\begin{gathered}
|X^{(k+1)}(\theta, y) - X^{(k)}(\theta, y)| + |\Psi^{(k+1)}(\theta, y) - \Psi^{(k)}(\theta, y)| \leqslant \\
\leqslant |\Upsilon^{(k+1)}(\theta, y)| + |\Phi^{(k+1)}(\theta, y)| + |X^{(k)}(\theta + \Phi^{(k+1)}(\theta, y), \\
y + \Upsilon^{(k+1)}(\theta, y)) - X^{(k)}(\theta, y)| + |\Psi^{(k)}(\theta + \Phi^{(k+1)}(\theta, y), \\
y + \Upsilon^{(k+1)}(\theta, y)) - \Psi^{(k)}(\theta, y)| \leqslant 2N_k^{-1} + 2b_1 N_k^{-1} = 2(1 + b_1) N_s^{-1}, \quad (5.41)
\end{gathered}
$$

из которой следует критерий равномерной сходимости последовательностей функций $X^{(k)}(\theta, y)$ и $\Psi^{(k)}(\theta, y)$.

Положим

$$
X^{(\infty)}(\theta, y) = \lim_{k \to \infty} X^{(k)}(\theta, y), \quad \Psi^{(\infty)}(\theta, y) = \lim_{k \to \infty} \Psi^{(k)}(\theta, y). \quad (5.42)
$$

Из периодичности по θ функций $X^{(k)}(\theta, y)$ и $\Psi^{(k)}(\theta, y)$ следует периодичность функций $X^{(\infty)}(\theta, y)$ и $\Psi^{(\infty)}(\theta, y)$, из соотношений типа (5.29)— соотношения

$$
X^{(\infty)}(\theta, 0) = \left. \frac{\partial X^{(\infty)}(\theta, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = \Psi^{(\infty)}(\theta, 0) = 0,
$$

а из неравенства (5.41) — оценка

$$
|X^{(\infty)}(\theta, y)| + |\Psi^{(\infty)}(\theta, y)| \leqslant 2(1 + b_1) \sum_{\nu=0}^{\infty} N_\nu^{-1} \leqslant \bar{\eta}.
$$

Аналогично тому, как это сделано в работе [10], можно доказать, что функции $X^{(\infty)}(\theta, y)$ и $\psi^{(\infty)}(\theta, y)$ $k_0 - 1$ раз непрерывно дифференцируемы, и, поскольку

$$
|F^{(k)}(\theta, y)| + |f^{(k)}(\theta, y)| \to 0 \text{ при } k \to \infty
$$

равномерно относительно θ, y, то, положив

$$
\Upsilon(\theta, y) = X^{(\infty)}(\theta, y), \quad \Phi(\theta, y) = \Psi^{(\infty)}(\theta, y),
$$

мы завершим доказательство теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров П. С.* Комбинаторная топология.— М.; Л.: Гостехиздат, 1947.—660 с.
2. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели. I. Об отображении окружности в себя.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1961, **25**, № 1, с. 21—36.
3. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели. II. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.— Успехи мат. наук, 1963, **18**, № 5, с. 13—40.
4. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблема устойчивости движения в классической и небесной механике.— Там же, № 6, с. 91—192.
5. *Беллман Р., Калаба Р.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи.— М.: Мир, 1968.—183 с.
6. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными.— М.: Мир, 1966.—351 с.
7. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике.— Киев: Изд-во АН УССР, 1945.—137 с.
8. *Боголюбов Н. Н.* О квазипериодических решениях в задачах нелинейной механики.— В кн.: Тр. первой летней мат. шк. Киев: Наук. думка, 1964, ч. 1, с. 11—101.
9. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Физматгиз, 1963.—503 с.
10. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев: Наук. думка, 1969.— 246 с.
11. *Боль П. Г.* Избранные труды.— Рига: Изд-во АН ЛатвССР, 1961.—237 с.
12. *Болтянский В. Г.* Оптимальное управление дискретными системами.— М.: Наука, 1973.—446 с.
13. *Борисович Ю. Г.* О методике Пуанкаре — Андронова в задачах о периодических и ограниченных решениях дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.— М., 1967, с. 5—17 (Тр. семинара по теории дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом / Ун-т Дружбы народов им. П. Лумумбы; Т. 5).
14. *Борисович Ю. Г.* О методе Пуанкаре — Андронова в задаче о периодических решениях дифференциальных уравнений с запаздыванием.— Докл. АН СССР, 1963, **152**, № 4, с. 779—782.
15. *Борисович Ю. Г., Субботин В. Ф.* Теоремы существования периодических полуположительных решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.— Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1967, с. 111—115 (Тр. семинара по функцион. анализу; Вып. 9).
16. *Бортей М. С., Фодчук В. И.* Асимптотическая приводимость нелинейной системы дифференциально-функциональных уравнений к линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений.— Укр. мат. журн., 1976, **28**, № 5, с. 592—602.
17. *Бортей М. С., Фодчук В. И.* О приводимости и построении решений систем линейных дифференциально-функциональных уравнений с квазипериодическими коэффициентами.— Дифференц. уравнения, 1979, **15**, № 5, с. 771—783.

18. *Вахабов Г.* О периодических решениях нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1968, с. 95—107 (Тр. семинара по мат. физике и нелинейн. колебаниям ; Т. 1. Вып. 2).
19. *Вахабов Г.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем интегро-дифференциальных уравнений.— Укр. мат. журн., 1969, **21**, № 5, с. 675—683.
20. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем.— М. : Изд-во МГУ им. М. В. Ломоносова, 1971.— 505 с.
21. *Вуйтович Б.* Про чисельно-аналітичний метод дослідження інтегро-диференціальних рівнянь.— Вісн. Київ. ун-ту. Математика і механіка, 1982, вип. 24, с. 14—21.
22. *Вуйтович Б., Нуржанов О. Д.* Метод Бубнова — Галеркина для нелинейных периодических систем интегро-дифференциальных уравнений с бесконечным последействием.— Киев, 1982.—36 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики ; 82.50).
23. *Гребенников Е. А.* Некоторые оценки метода осреднения для многочастотных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— Дифференц. уравнения, 1968, **4**, № 3, с. 459—473.
24. *Гребенников Е. А., Рябов Ю. А.* Новые качественные методы в небесной механике.— М. : Наука, 1971.—442 с.
25. *Гребенников Е. А., Рябов Ю. А.* Резонансы и малые знаменатели в небесной механике.— М. : Наука, 1978.—426 с.
26. *Гребенников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем.— М. : Наука, 1979.—431 с.
27. *Гуртовник А. С., Коган В. П., Неймарк Ю. И.* Тороидальные инвариантные многообразия и резонансы в дискретных динамических системах.— Укр. мат. журн., 1975, **27**, № 2, с. 167—182.
28. *Данканич В. А.* Квазипериодические решения систем с запаздыванием.— Там же, 1984, **36**, № 1, с. 105—110.
29. *Завалыкут Г. Д.* Численно-аналитический метод исследования периодических решений одного класса дифференциально-операторных уравнений.— Дифференц. уравнения, 1983, **19**, № 4, с. 569—575.
30. *Зверкин А. М.* Об интегральных многообразиях для систем с запаздыванием.— В кн.: Тр. V Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1970, т. 1, с. 275—282.
31. *Зверкин А. М., Каменский Г. А., Норкин С. Б., Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом.— Успехи мат. наук, 1962, **17**, № 2, с. 77—164.
32. *Зверкин А. М., Каменский Г. А., Норкин С. Б., Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом.— М., 1963, с. 3—49 (Тр. семинара по теории дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом / Ун-т Дружбы народов им. П. Лумумбы ; Т. 2).
33. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М. : Наука, 1976.—544 с.
34. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения.— М. : Физматгиз, 1959.—211 с.
35. *Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Стрыгин В. В.* Об одном новом методе в задаче о периодических решениях уравнения с отклоняющимся аргументом.— М., 1967, с. 116—120 (Тр. семинара по теории дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом / Ун-т Дружбы народов им. П. Лумумбы ; Т. 5).
36. *Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С.* Нелинейные почти периодические колебания.— М. : Наука, 1970.—351 с.
37. *Красносельский М. А., Перов А. И., Поволоцкий А. М., Забрейко П. П.* Векторные поля на плоскости.— М. : Физматгиз, 1963.—245 с.
38. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1966.—331 с.
39. *Красносельский М. А.* О некоторых новых методах в теории периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— В кн.: Тр.

Второго Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. М. : Наука, 1965, т. 2, с. 81—96.
40. *Красносельский М. А.* Альтернативный принцип существования периодических решений для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.— Докл. АН СССР, 1963, **152**, № 4, с. 801—804.
41. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику.— Киев : Изд-во АН УССР, 1937.—363 с.
42. *Левитан Б. М.* Почти периодические функции.— М. : Гостехиздат, 1953.— 396 с.
43. *Мартынюк Д. И.* О периодических решениях счетных систем периодических дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.— Мат. физика, 1968, вып. 4, с. 84—89.
44. *Мартынюк Д. И.* Периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом.— Укр. мат. журн., 1967, **19**, № 4, с. 125—132.
45. *Мартынюк Д. И.* Периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка с запаздывающим аргументом.— В кн.: Материалы Второй всесоюз. межвуз. конф. по теории и прил. дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом. Черновцы : Изд-во Черновиц. ун-та, 1968, с. 102—104.
46. *Мартинюк Д. І.* Періодичні розв'язки зчисленних систем диференціальних рівнянь з запізненням.— В кн.: III наук. конф. молодих математиків України. К. : Наук. думка, 1968, с. 506—509.
47. *Мартынюк Д. И.* Лекции по теории устойчивости решений систем с последействием.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1971.—177 с.
48. *Мартынюк Д. И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1972.—246 с.
49. *Мартынюк Д. И.* Исследование окрестности гладкого инвариантного тороидального многообразия системы разностных уравнений.— Дифференц. уравнения, 1975, **11**, № 8, с. 1474—1484.
50. *Мартынюк Д. И.* О периодических решениях одного функционального уравнения.— В кн.: Аналитические и качественные методы исследования дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1977, с. 121—127.
51. *Мартынюк Д. И.* Метод Бубнова — Галеркина отыскания периодических и квазипериодических решений систем с запаздыванием.— В кн.: Тр. Второй конф. «Дифференциальные уравнения и применения». Русе, 1982, ч. 2, с. 445—448.
52. *Мартынюк Д. И.* Периодические и квазипериодические решения дифференциально-разностных и разностных уравнений : Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— Киев, 1982.—24 с.
53. *Мартынюк Д. И., Данканич В. А.* Метод Галеркина построения квазипериодических решений систем с запаздыванием.— В кн.: IX Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям. Киев : Наук. думка, 1981, с. 107—108.
54. *Мартынюк Д. И., Козубовская И. Г.* К вопросу о периодических решениях квазилинейных автономных систем с запаздыванием.— Укр. мат. журн., 1968, **20**, № 2, с. 263—265.
55. *Мартынюк Д. И., Коломиец В. Г.* Периодические решения сильно нелинейных систем с запаздыванием.— Мат. физика, 1968, вып. 4, с. 55—65.
56. *Мартынюк Д. И., Миронов Н. В., Харабовская Л. В.* Устойчивость решений разностных уравнений.— В кн.: Дифференциально-разностные уравнения. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1971, с. 45—58.
57. *Мартынюк Д. И., Миронов Н. В., Харабовская Л. В.* Численно-аналитический метод исследования периодических решений нелинейных разностных уравнений.— Там же, с. 58—66.
58. *Мартынюк Д. И., Перестюк Н. А.* О приводимости линейных систем разностных уравнений с квазипериодическими коэффициентами.— Вычисл и прикл. математика, 1974, вып. 23, с. 116—127.
59. *Мартынюк Д. И., Перестюк Н. А.* О приводимости разностных уравнений на торе.— Там же, 1975, вып. 26, с. 42—48.
60. *Мартынюк Д. И., Перестюк Н. А.* Приводимость линейных систем разностных уравнений с гладкой правой частью.— Там же, вып. 27, с. 34—40.

61. *Мартынюк Д. И., Самойленко А. М.* О периодическнх решениях нелинейных систем с запаздыванием.— Мат. физика, 1967, вып. 3, с. 128—145.
62. *Мартынюк Д. И., Самойленко А. М.* Периодические решения нелинейных систем с запаздыванием.— В кн.: Тез. докл. и сообщ. на Всесоюз. межвуз. симпоз. по прикл. математике и кибернетике. Горький : Изд-во Горьк. ун-та, 1967, с. 14—15.
63. *Мартынюк Д. И., Самойленко А. М.* Об одном методе исследования периодических решений нелинейных снстем.— В кн.: Тр. V Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям. Кнев : Ин-т математики АН УССР, 1970, т. I, с. 423—428.
64. *Мартынюк Д. И., Самойленко А. М.* Инвариантные торы систем с последействием.— Годишн. Висш. учебни завед. Прил. мат. 1976, 11, кн. 3, с. 47—53.
65. *Мартынюк Д. И., Самойленко А. М.* Существование инвариантных многообразий систем с запаздыванием.— Укр. мат. журн., 1974, **26**, № 5, с. 611—620.
66. *Мартынюк Д. И., Самойленко А. М.* О приведении системы разностных уравнений в окрестности тороидального многообразия.— В кн.: Нелинейные эффекты в микроэлектронике и их прнменение.— Киев : О-во «Знание» УССР, 1974, с. 3.
67. *Мартынюк Д. И., Самойленко А. М.* Инвариантные тороидальные многообразня систем с запаздыванием.— В кн.: IV Всесоюз. конф. по теории и прил. дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом. Киев : Наук. думка, 1975, с. 160—161.
68. *Мартынюк Д. И., Фодчук В. И.* Аснмптотическое интегрирование квазилинейных автономных систем с запаздыванием.— Укр. мат. журн., 1966, **18**, № 3, с. 117—119.
69. *Мартынюк Д. И., Фодчук В. И.* Пернодические решення дифференциального уравнения n-го порядка с запаздыванием.— Мат. физика, 1963, вып. 4, с. 90—92.
70. *Мартынюк Д. І., Харабовська Л. В.* Про періодичні розв'язки систем лінійних диференціальних рівнянь з запізненням.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1970, № 3, с. 217—220.
71. *Мартынюк Д. И., Цыгановский Н. С.* Инварнантные многообразия систем с запаздываннем, подверженных импульсному воздействию.— Дифференц. уравнения, 1979, **15**, № 10, с. 1783—1795.
72. *Мартынюк Д. И., Цыгановский Н. С.* Существование тороидальных множеств импульсных систем с запаздыванием.— В кн.: V Всесоюз. конф. по качеств. теорин дифференц. уравнений. Кншннев : Штнинца, 1979, с. 116—117.
73. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И., Данканич В. А.* Метод Галеркина в теории квазнпернодическнх решений нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием.— Укр. мат. журн., 1980, **32**, № 4, с. 553—557.
74. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И.* Лекции по теории колебаний систем с запаздыванием.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1969.—309 с.
75. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И.* Периодическне н квазипериодические колебания систем с запаздываннем.— Киев : Вища шк., 1979.—247 с.
76. *Митропольский Ю. А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебанний.— М. : Наука, 1964.—431 с.
77. *Митропольский Ю. А., Михайловская Н. А.* Перноднческие решения дискретных разностных уравнений второго порядка.— Укр. мат. журн., 1972, **24**, № 4, с. 543—547.
78. *Митропольский Ю. А.* О построении решений и приводимости дифференциальных уравненнй с квазипернодическимн коэффнцнентамн.— В кн.: III Всесоюз. съезд по теорет. и прнкл. механнке. М. : Наука, 1968, с. 212—213.
79. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в иелинейной механике.— М. : Наука, 1974.—512 с.
80. *Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И.* Асимптотические решения уравнений в частных пронзводных.— Киев : Вища шк., 1976.—589 с.
81. *Митропольський Ю. О., Самойленко А. М.* До питання про структуру траєкторій на тороїдальннх многовидах.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1964, № 8, с. 984—985.

82. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* О построении решений линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами с помощью метода ускоренной сходимости.— Укр. мат. журн., 1965, **17**, № 6, с. 42—59.
83. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Цидыло К. В.* Об инвариантных тороидальных многообразиях нелинейных систем с запаздыванием.— В кн.: Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. Киев : Наук. думка, 1977, с. 207—214.
84. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Асимптотическое исследование слабо нелинейных систем.— Киев, 1976.—50 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики ; 76.5).
85. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Исследование колебательных систем второго порядка.— Киев, 1976.—50 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики ; 76.6).
86. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* О квазипериодических колебаниях в нелинейных системах.— Укр. мат. журн., 1972, **24**, № 2, с. 179—194.
87. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Условно-периодические колебания в системах нелинейной механики.— Мат. физика, 1972, вып. 12, с. 86—105.
88. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* К вопросу обоснования метода усреднения для уравнений второго порядка с импульсным воздействием.— Укр. мат. журн., 1977, **29**, № 6, с. 750—762.
89. *Мозер Ю.* Быстро сходящийся метод итераций нелинейных дифференциальных уравнений.— Успехи мат. наук, 1968, **23**, вып. 4, с. 179—238.
90. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.— М. : Наука, 1972.—351 с.
91. *Неймарк Ю. И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука., 1972.—471 с.
92. *Неймарк Ю. И.* Инвариантные многообразия дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами.— В кн.: IV Всесоюз. конф. по теории и прил. дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом. Киев : Наук. думка, 1975, с. 180—191.
93. *Неймарк Ю. И.* Динамические системы и управляемые процессы.— М. : Наука, 1978.—336 с.
94. *Нуржанов О. Д.* Численно-аналитический метод исследования нелинейных периодических систем одного класса интегро-дифференциальных уравнений.— Мат. физика, 1977, вып. 22, с. 22—30.
95. *Нуржанов О. Д.* О периодических решениях нелинейных интегро-дифференциальных уравнений.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 7, с. 595—599.
96. *Ордынская З. П.* Инвариантные тороидальные многообразия систем с запаздыванием : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1977.—9 с.
97. *Ордынская З. П.* О поведении решений системы дифференциальных уравнений с запаздыванием вблизи интегрального многообразия.— Диффер уравнения, 1976, **12**, № 8, с. 1446—1454.
98. *Ордынская З. П.* О существовании инвариантного многообразия системы уравнений с запаздыванием.— Мат. физика, 1979, вып. 19, с. 49—57.
99. *Парасюк И. О.* Построение и исследование квазипериодических решений некоторых классов дифференциальных уравнений : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1978.—14 с.
100. *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1974.—119 с.
101. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1964.—279 с.
102. *Пинни Э.* Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения.— М. : Изд-во иностр. лит., 1961.—248 с.
103. *Плисс В. А.* Нелокальные проблемы теории колебаний.— М. ; Л. : Наука, 1964.—368 с.
104. *Рубаник В. П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием.— М. : Наука, 1969.—287 с.
105. *Рожков В. И.* Асимптотика периодического решения уравнения нейтрального типа с малым запаздыванием.— Докл. АН СССР, 1968, **180**, № 5, с. 1041—1044.

106. *Рожков В. И.* Асимптотические свойства периодических решений систем уравнений нейтрального типа с малым запаздыванием.— В кн.: Тр. V Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1970, т. 1, с. 475—482.
107. *Рябов Ю. А.* Применение метода малого параметра для построения решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.— Докл. АН СССР, 1960, **133**, № 2, с. 288—291.
108. *Рябов Ю. А.* Метод малого параметра в теории периодических решений дифференциальных уравнений с запаздыванием.— М., 1962, с. 103—113 (Тр. семинара по теории дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом / Ун-т Дружбы народов им. П. Лумумбы ; Вып. 1).
109. *Рябов Ю. А.* Применение метода малого параметра к исследованию систем автоматического регулирования с запаздыванием.— Автоматика и телемеханика, 1960, **21**, № 6, с. 729—739.
110. *Рябов Ю. А.* Анализ нелинейных колебаний систем с малым запаздыванием.— В кн.: Второй Всесоюз. съезд по теорет. и прикл. механике. М. : Наука, 1964, с. 188—189.
111. *Рябов Ю. А.* Применение метода малого параметра Ляпунова — Пуанкаре в теории систем с запаздыванием.— Инж. журн., 1961, **1**, № 2, с. 3—15.
112. *Рябов Ю. А., Толмачев И. Л.* Построение условно-периодических решений в задачах теории нелинейных колебаний с помощью ЭВМ.— В кн.: Тез. докл. V Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1969, с. 189.
113. *Самойленко А. М.* Об экспоненциальной устойчивости инвариантного тора динамической системы.— Дифференц. уравнения, 1975, **11**, № 5, с. 820—834.
114. *Самойленко А. М.* К вопросу о структуре траекторий на торе.— Укр. мат. журн., 1964, **16**, № 6, с. 769—782.
115. *Самойленко А. М.* О приводимости системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности гладкого тороидального многообразия.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1966, **30**, № 5, с. 1047—1072.
116. *Самойленко А. М.* О приводимости системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности гладкого интегрального многообразия.— Укр. мат. журн., 1966, 18, № 6, с. 41—64.
117. *Самойленко А. М.* О приводимости систем линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами.— Там же, 1968, **20**, № 2, с. 279—281.
118. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I.— Там же, 1965, **17**, № 4, с. 82—93.
119. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. II.— Там же, 1966, **18**, № 2, с. 50—59.
120. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1970, **34**, № 6, с. 1219—1240.
121. *Самойленко А. М.* К теории возмущения инвариантных многообразий динамических систем.— В кн.: Тр. V Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1970, т. 1, с. 495—499.
122. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений.— Киев : Вища шк., 1976.—179 с.
123. *Самойленко А. М., Мартынюк Д. И., Перестюк Н. А.* Инвариантные торы разностных уравнений.— Дифференц. уравнения, 1973, **9**, № 10, с. 1904—1910.
124. *Самойленко А. М., Нуржанов О. Д.* Метод Бубнова — Галеркина построения периодических решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра.— Там же, 1979, **15**, № 8, с. 1503—1517.
125. *Самойленко А. М., Парасюк І. О.* Про метод Гальоркіна в теорії збурень інваріантних торів.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1977, № 2, с. 112—115.
126. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем.— М. : Наука, 1973.—415 с.
127. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.— М. : Наука, 1977.—656 с.

128. *Самарский А. А., Карамзин Ю. Н.* Разностные уравнения. М.: Знание, 1978.—64 с.
129. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике.— Л.: Изд-во ЛГУ им. А. А. Жданова, 1950.—255 с.
130. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1966.— 443 с.
131. *Ткач Б. П.* О периодических решениях счетной системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа.— Укр. мат. журн., 1969, **21**, № 1, с. 73—85.
132. *Урабе М.* Метод Галеркина для нелинейных периодических систем.— Механика, 1966, **97**, № 3, с. 3—34.
133. *Филатов А. Н., Шарова Л. В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1975.—152 с.
134. *Фодчук В. И.* Исследование интегральных многообразий для системы нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.— Укр. мат. журн., 1965, **17**, № 4, с. 92—102.
135. *Фодчук Н. И.* Об интегральных многообразиях для систем с запаздыванием.— В кн.: Тр. V Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970, т. 1, с. 558—564.
136. *Халанай А.* Периодические инвариантные многообразия для некоторого класса систем с запаздыванием.— Rev. roum. math. pures at appl., 1965, **10**, № 3, с. 251—261.
137. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем.— М.: Мир, 1971.—309 с.
138. *Хейл Ж.* Колебания в нелинейных системах.— М.: Мир, 1966.—229 с.
139. *Цидыло К. В.* Колебания нелинейных систем с запаздыванием: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1973.—11 с.
140. *Шиманов С. Н.* К теории дифференциальных уравнений с последействием.— Дифференц. уравнения, 1965, **1**, № 1, с. 102—116.
141. *Шиманов С. Н.* К теории периодических колебаний квазилинейных неавтономных периодических систем с периодическими запаздываниями.— В кн.: Тр. V Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970, т. 1, с. 617—622.
142. *Шиманов С. Н.* К теории колебаний квазилинейных систем с запаздыванием.— Прикл. математика и механика, 1959, **23**, вып. 5, с. 836—844.
143. *Шиманов С. Н.* Колебания квазилинейных автономных систем с запаздыванием.— Изв. вузов. Радиофизика, 1960, **3**, № 3, с. 456—466.
144. *Шиманов С. Н.* Об одном способе получения условия существования периодических решений нелинейных систем.— Прикл. математика и механика, 1957, **19**, вып. 2, с. 225—228.
145. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— М.: Наука, 1971.—231 с.
146. *Hale J. K.* Averaging methods for differential equations with retarded arguments and a small parameter.— J. Different. Equat., 1966, **2**, N 1, p. 57—79.
147. *Halanay A.* Invariant manifolds for systems with time lag.— In: Differential equations and dynamical systems. New-York: Acad. press, 1967.
148. *Cesari L.* Functional analysis and periodic solutions of nonlinear differential equations.— In: Contributions to differential equations. New-York, 1963, vol. 1, p. 148—187.
149. *Sacker R.* A new approach to the Perturbation theory of invariant surfaces.— Communs Pure and Appl. Math., 1965, **18**, N 4, p. 717—732.
150. *Sacker R.* A perturbation theorem for invariant manifold and hölder continuity.— J. Math. and mech., 1969, **18**, N 8, p. 705—762.
151. *Urabe M.* Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems.— Arch. Ration. Mech. and Anal., 1965, **20**, N 2, p. 120—152.
152. *Urabe M.* Existence theorems of quasiperiodic solutions to nonlinear differential systems.— Funkc. ekvacioj, 1972, **15**, N 1, p. d5—100.
153. *Urabe M.* On a modified galerkin's procedure for nonlinear quasiperiodic differential systems.— In: Equations différentielles et fonctionnelles non linéaires. Paris, 1973, p. 223—258.